

$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b y$

y^3

$\frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$

$\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\tan \alpha}$

$\sqrt{x^2 - x} - x^2$

$n! = \prod_{k=1}^n k$

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot [\text{Adj}(A)]^t$

$x_A = x_c$
 $\frac{x_A + x_c}{2}$

$m = S/2$

$(x) = \frac{d}{3}$

$f(x) \sim \frac{a\pi}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}$

$\Delta x \rightarrow 0$

$(x) = d$

$\sqrt[3]{a^4}$

$m = S$

$V + E + F = 2$

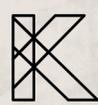
$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$

$\sin \frac{3}{4}$

$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

e-ISSN
2665-2471

IN X S P MATEMÁTICO

 **KONRAD LORENZ**
FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

Vol. 5
No. 2

PASKÍN MATEMÁTICO

<https://editorial.konradlorenz.edu.co/paskin-matematico.html>

e-mail: paskin@konradlorenz.edu.co

Editor

John A. Arredondo

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co

Comité Editorial

Ruth Alejandra Torres

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
rutha.torresr@konradlorenz.edu.co

Julián Jiménez Cárdenas

Universidad de los Andes
jo.jimenezc1@uniandes.edu.co

Camilo Ramírez Maluendas

Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales
camramirezma@unal.edu.co

Andrés Mauricio Rivera

Pontificia Universidad Javeriana
Sede Cali
amrivera@javerianacali.edu.co

Leidy Catherine Sánchez

Fundación Cardioinfantil
lcascanio@lacardio.org

Jesús Muciño

Centro de Ciencias Matemáticas UNAM-Morelia
muciray@matmor.unam.mx

Esta publicación puede ser difundida y reproducida con fines académicos y científicos por todos aquellos que tengan a bien hacer un correcto uso de su contenido.

ISSN 2665-2471

Fundación Universitaria Konrad Lorenz: Tel: (57 1) 347 23 11, Carrera 9 Bis No. 62- 43 Bogotá – Colombia, email: info@konradlorenz.edu. **Carácter académico:** Institución Universitaria. Personería Jurídica por Resolución 18537 del 4 de noviembre de 1981 del Ministerio de Educación Nacional. Institución de Educación Superior sujeta a inspección y vigilancia por el Ministerio de Educación Nacional (Art. 2.5.3.2.10.2, Decreto 1075 de 2015).

En este número

- Juan Pablo Hernández Rodas - El problema de las ocho reinas - pag. 1
- Reynaldo Castaneira Ramírez - ¿Cicloide, braquistócrona o tautócrona - pag. 7
- César Augusto Lara Santana - Ventajas y desventajas de utilizar los modelos de función de transferencia - pag. 14
- Walter Garzón Gutiérrez - Representación gráfica y algebraica de las ecuaciones lineales y sus propiedades en el sistema seno - pag. 21
- Blanca Margarita Parra Mosqueda - Obstáculos en la concepción de los números negativos y de sus logaritmos - pag. 33
- Leidy Catherine Sánchez Ascanio – MateKuento - pag. 39
- John A. Arredondo y Alejandro Cárdenas - Paskín Challenge - pag. 42

variable x_1 , luego entre el punto \bullet_1 y el punto \bullet_2 llene los espacios con la variable x_2 . Continúe de esta forma, es decir, entre los puntos \bullet_{j-1} y \bullet_j llene los espacios con la variable x_j . Al final, los espacios que sobren a la derecha del último punto \bullet_{n-1} llénelos con la variable x_n . Por ejemplo en el dibujo anterior al seguir este procedimiento obtenemos

$$x_1 \ x_1 \ x_1 \ \bullet_1 \ x_2 \ x_2 \ \bullet_2 \ x_3 \ \dots \ \bullet_{n-2} \ x_{n-1} \ x_{n-1} \ x_{n-1} \ \bullet_{n-1} \ x_n \ x_n \ x_n.$$

Note que con este procedimiento siempre se obtiene al final un monomio de grado i . Veamos que de esta forma se obtienen todos los posibles monomios de grado i . En efecto, consideremos un monomio $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$. Tomemos $n+i-1$ espacios en blanco $\bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3} \ \dots \ \bar{n+i-2} \ \bar{n+i-1}$ y ubiquemos $n-1$ puntos de la siguiente manera: coloque el primer punto en la casilla $\alpha_1 + 1$, de esta forma vamos a tener la variable x_1 en las α_1 casillas que están a la izquierda de este punto, es decir,

$$x_1 \ x_1 \ \dots \ x_1 \ \bullet_1 \ \dots$$

Luego ubique el punto \bullet_2 en la casilla $\alpha_1 + \alpha_2 + 2$ y de esta forma vamos a tener α_2 veces la variable x_2 en las casillas que están entre los puntos \bullet_1 y \bullet_2 .

$$x_1 \ x_1 \ \dots \ x_1 \ \bullet_1 \ x_2 \ x_2 \ \dots \ x_2 \ \bullet_2 \ \dots$$

En general, ubique el punto \bullet_j en la casilla $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_j + j$. Como el punto \bullet_{j-1} está ubicado en la casilla $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{j-1} + j - 1$ se sigue que entre los puntos \bullet_{j-1} y \bullet_j hay α_j casillas que corresponden a las que serán llenadas con la variable x_j . Al final obtenemos algo de la forma

$$x_1 x_1 \dots x_1 \ \bullet_1 \ x_2 x_2 \dots x_2 \ \bullet_2 \ \dots \ \bullet_{n-2} \ x_{n-1} x_{n-1} \dots x_{n-1} \ \bullet_{n-1} \dots$$

Note que a la derecha del último punto \bullet_{n-1} hay precisamente α_n espacios en blanco, ya que comenzamos con $n+i-1$ espacios en blanco y hemos llenado $\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + n - 1$ espacios, luego nos quedan $n+i-1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + n - 1)$ espacios, es decir, $n + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n - 1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + n - 1) = \alpha_n$ espacios, que los llenamos con la variable x_n . Por lo tanto tenemos

$$x_1 x_1 \dots x_1 \ \bullet_1 \ \dots \ \bullet_{n-2} \ x_{n-1} x_{n-1} \dots x_{n-1} \ \bullet_{n-1} \ x_n x_n \dots x_n$$

que corresponde al monomio $x_1^{\alpha_1} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n}$.

Claramente cada ubicación de los $n-1$ puntos determina un único monomio, por lo tanto podemos concluir que hay $\binom{n+i-1}{n-1}$ monomios de grado i en n variables. \square

Ejercicio 1. Demuestre que el número de monomios en el anillo de polinomios $R = K[x_1, \dots, x_n]$ de grado menor o igual a k está dado por $\binom{n+k}{n}$.

En general al estudiar la estructura algebraica de anillos, los ideales permiten construir por medio de cocientes, nuevos objetos con la misma estructura algebraica. En el caso de anillos graduados, los subconjuntos que al hacer cociente por ellos producen nuevamente anillos graduados son los ideales

homogéneos.

Recordemos que en general, dado un anillo conmutativo R , decimos que un subconjunto $I \subset R$ es un ideal, si $(I, +)$ es un subgrupo abeliano de $(R, +)$ y si además para todo $r \in R$ y para todo $x \in I$ se tiene que $rx \in I$.

Observación 1. Sea $R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i$ un anillo graduado. A los elementos de R_i los llamaremos elementos homogéneos de grado i .

Definición 4. Dado un anillo graduado $R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i$, decimos que un ideal I de R es homogéneo, si dado $f = f_0 + f_1 + \dots + f_n \in R$, con $f_j \in R_j$ para todo $j = 0, 1, \dots, n$, se tiene que $f \in I$ si y solo si $f_j \in I$ para todo $j = 0, 1, \dots, n$, en otras palabras, cada que un elemento de R está en I es porque todas sus componentes homogéneas también lo están.

Observación 2. De la definición anterior se sigue que si un ideal $I \subset R$ es homogéneo entonces I es graduado, y su graduación está dada por

$$I = \bigoplus_{j=0}^{\infty} I \cap R_j.$$

En el caso del anillo de polinomios $R = K[x_1, \dots, x_n]$, como este anillo es Noetheriano, es decir, todos sus ideales son finitamente generados, entonces se puede probar que un ideal I es homogéneo si y solo si es generado por elementos homogéneos.

Ejemplo 1. Consideremos el anillo $R = K[x, y, z]$. De la observación anterior tenemos por ejemplo que el ideal $I = \langle x^2 + yz, x - y, z^3 - x^2y \rangle$ es un ideal homogéneo.

En general, dado un anillo conmutativo R y un ideal $I \subset R$, podemos construir el anillo cociente R/I . En el caso de anillos graduados, al tener un anillo graduado R y un ideal I de R , el cociente R/I no necesariamente resulta ser un anillo graduado. Sin embargo, cuando el ideal I es homogéneo, el anillo resultante R/I tiene una graduación.

Teorema 1. Sea $R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i$ un anillo graduado y sea $I \subset R$ un ideal homogéneo. Entonces R/I es un anillo graduado, más aún,

$$R/I = \bigoplus_{j=0}^{\infty} (I + R_j)/I.$$

Demostración. Como I es un subgrupo del grupo abeliano $I + R_j$, entonces el cociente $(I + R_j)/I$ es un grupo abeliano. Por otro lado, como R/I es un anillo e $I + R_i \subset R$ para todo $i \geq 0$, entonces la multiplicación de R/I induce una multiplicación entre $(I + R_j)/I$ e $(I + R_k)/I$. Si consideramos $\bar{x} \in (I + R_j)/I$ y $\bar{z} \in (I + R_k)/I$, tomando representantes tenemos $x = y + r_j$ y $z = w + r_k$ donde $y, w \in I$, $r_j \in R_j$ y $r_k \in R_k$. Luego $xz = (y + r_j)(w + r_k) = yw + r_j w + r_k y + r_j r_k \in I + R_{j+k}$. Esto muestra entonces que $\bar{x} \cdot \bar{z} \in (I + R_{j+k})/I$.

Solo nos resta ver que $R/I = \bigoplus_{j=0}^{\infty} (I + R_j)/I$. En efecto, tomemos $\bar{x} \in R/I$. Al tomar un representante $r \in R$, es decir,

$\bar{x} = \bar{r}$ tenemos que $x - r \in I$. Digamos que $x = x_0 + x_1 + \dots + x_n$ y $r = r_0 + r_1 + \dots + r_n$, luego $x - r = (x_0 - r_0) + (x_1 - r_1) + \dots + (x_n - r_n)$ donde $x_i - r_i$ es la componente homogénea de grado i del elemento $x - r$. Como $x - r \in I$ y además I es un ideal homogéneo, tenemos entonces que $x_j - r_j \in I$ para todo $j \geq 0$, por lo tanto $x_j - r_j = t_j$ donde $t_j \in I$. Esto nos permite escribir $x = (t_0 + r_0) + (t_1 + r_1) + \dots + (t_n + r_n)$ donde $t_j + r_j \in I + R_j$. Al tomar clase módulo I a ambos lados, obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \overline{(t_0 + r_0) + (t_1 + r_1) + \dots + (t_n + r_n) + \dots} \\ &= \overline{(t_0 + r_0)} + \overline{(t_1 + r_1)} + \dots + \overline{(t_n + r_n)} + \dots \end{aligned}$$

Finalmente, si $\overline{(t_0 + r_0)} + \overline{(t_1 + r_1)} + \dots + \overline{(t_n + r_n)} = \overline{(l_0 + f_0)} + \overline{(l_1 + f_1)} + \dots + \overline{(l_n + f_n)}$ entonces

$$(r_0 - f_0) + (r_1 - f_1) + \dots + (r_n - f_n) \in I,$$

y como I es un ideal homogéneo entonces $r_j - f_j \in I$ para todo $j \geq 0$. De aquí podemos concluir que $t_i + r_i = l_i + f_i$ para todo $i \geq 0$. \square

Observación 3. Consideremos el anillo de polinomios $R = K[x_1, \dots, x_n]$.

- Sea I un ideal monomial de R , es decir, un ideal generado por monomios, $I = \langle m_1, \dots, m_k \rangle$ donde m_1, \dots, m_k son monomios. Note que en particular I es un ideal homogéneo ya que es generado por monomios y en particular un monomio es un elemento homogéneo. Por el teorema anterior, R/I es un anillo graduado.
- R/I es un K -espacio vectorial generado por la clase de todos los monomios de R que no pertenecen a I , es decir, $\mathcal{B} = \{\bar{m} : m \text{ monomio}, m \notin I\}$ es una base para el K -espacio vectorial R/I .
- Sea I un ideal homogéneo de R . Ya sabemos que R/I es un anillo graduado, pero en este caso podemos decir aún más, y es que la graduación de R/I se puede dar como

$$R/I = \bigoplus_{j=0}^{\infty} (R/I)_j$$

donde $(R/I)_j$ es el K -espacio vectorial generado por todas las clases de equivalencia de monomios en R de grado j que no pertenecen a I .

- De álgebra lineal podemos concluir entonces que una base para el K -espacio vectorial R/I se puede construir uniendo las bases de cada una de sus componentes homogéneas $(R/I)_j$.

3. Solución al problema de las ocho reinas.

Supongamos que tenemos un tablero de ajedrez ubicado en el plano cartesiano de tal manera que los vértices inferiores derechos de cada casilla corresponden a los puntos

coordenados (i, j) con $i, j = 1, \dots, 8$, y la casilla con vértice inferior derecho (i, j) está rotulada con la variable x_{ij} , como se puede ver en la siguiente figura.

x_{18}	x_{28}	x_{38}	x_{48}	x_{58}	x_{68}	x_{78}	x_{88}
x_{17}	x_{27}	x_{37}	x_{47}	x_{57}	x_{67}	x_{77}	x_{87}
x_{16}	x_{26}	x_{36}	x_{46}	x_{56}	x_{66}	x_{76}	x_{86}
x_{15}	x_{25}	x_{35}	x_{45}	x_{55}	x_{65}	x_{75}	x_{85}
x_{14}	x_{24}	x_{34}	x_{44}	x_{54}	x_{64}	x_{74}	x_{84}
x_{13}	x_{23}	x_{33}	x_{43}	x_{53}	x_{63}	x_{73}	x_{83}
x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{42}	x_{52}	x_{62}	x_{72}	x_{82}
x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}	x_{51}	x_{61}	x_{71}	x_{81}

$(0,0)$

Figura 1: Tablero de ajedrez rotulado con las variables x_{11}, \dots, x_{88} , donde la casilla con vértice inferior derecho (i, j) está marcada con la variables x_{ij} .

Consideremos el anillo de polinomios en estas 64 variables, es decir, $R = \mathbb{Q}[x_{11}, \dots, x_{81}, \dots, x_{18}, \dots, x_{88}]$. Notemos que a cada configuración de 8 reinas en este tablero, le podemos asociar un monomio de grado 8 del anillo de polinomios R , simplemente multiplicando todas las variables correspondientes a las ubicaciones de las reinas. En la figura 2 se puede observar un ejemplo de una configuración de ocho reinas en un tablero de ajedrez que no se comen entre ellas, junto con su monomio asociado.

Como el anillo R es conmutativo, no importa el orden en que se multipliquen las variables. Por comodidad, vamos a permitir que varias reinas estén en una misma casilla, y en este caso consideraremos que las reinas se comen entre ellas. Esto no afecta la solución del problema, ya que lo que pretendemos es encontrar todas las configuraciones buenas, en las cuales no puede ocurrir que más de una reina esté en una misma casilla.

Lo que vamos a hacer a continuación, es construir un ideal que contenga todos los monomios que correspondan a configuraciones malas, es decir, que correspondan a 8 reinas ubicadas en el tablero, donde por lo menos dos de ellas se comen. Dos reinas se comen entre ellas si y solo si están en una

x_{18}	x_{28}	x_{38}	●	x_{58}	x_{68}	x_{78}	x_{88}
x_{17}	x_{27}	x_{37}	x_{47}	x_{57}	x_{67}	●	x_{87}
x_{16}	x_{26}	●	x_{46}	x_{56}	x_{66}	x_{76}	x_{86}
x_{15}	x_{25}	x_{35}	x_{45}	x_{55}	x_{65}	x_{75}	●
x_{14}	●	x_{34}	x_{44}	x_{54}	x_{64}	x_{74}	x_{84}
x_{13}	x_{23}	x_{33}	x_{43}	●	x_{63}	x_{73}	x_{83}
●	x_{22}	x_{32}	x_{42}	x_{52}	x_{62}	x_{72}	x_{82}
x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}	x_{51}	●	x_{71}	x_{81}

(0,0)

x_{18}	x_{28}	x_{38}	x_{48}	x_{58}	x_{68}	x_{78}	x_{88}
x_{17}	x_{27}	x_{37}	x_{47}	x_{57}	x_{67}	x_{77}	x_{87}
x_{16}	x_{26}	x_{36}	x_{46}	x_{56}	x_{66}	x_{76}	x_{86}
x_{15}	x_{25}	x_{35}	x_{45}	x_{55}	x_{65}	x_{75}	x_{85}
x_{14}	x_{24}	x_{34}	x_{44}	x_{54}	x_{64}	x_{74}	x_{84}
x_{13}	x_{23}	x_{33}	x_{43}	x_{53}	x_{63}	x_{73}	x_{83}
x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{42}	x_{52}	x_{62}	x_{72}	x_{82}
x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}	x_{51}	x_{61}	x_{71}	x_{81}

(0,0)

Figura 2: Configuración de ocho reinas que no se comen entre ellas, con monomio asociado $x_{12}x_{24}x_{36}x_{48}x_{53}x_{61}x_{77}x_{85}$. Los puntos verdes representan a las reinas.

Figura 3: Tablero de ajedrez con una reina ubicada en la casilla marcada con la variable x_{75} , donde los cuadros tocados por las líneas verdes corresponden a todas las posiciones donde no es posible ubicar otra reina sin que se coma con la reina dada.

misma casilla, en una misma fila, en una misma columna o en una misma diagonal.

En la figura 3 se puede ver un ejemplo de un tablero de ajedrez con una reina ubicada en una posición específica, junto con todas las líneas que representan todos los otros cuadros del tablero donde al ubicar otra reina, esta se comen con la reina dada.

Comencemos identificando todos los monomios de grado dos que corresponden a dos reinas en el tablero que se comen entre ellas.

Para esto, fijemos una reina en la casilla correspondiente a la variable x_{ij} , $1 \leq i, j \leq 8$. Una manera de encontrar todas las variables x_{kl} tales que al ubicar una reina en la casilla marcada con la variable x_{kl} , esta reina se coma con la reina ubicada en la casilla marcada con la variable x_{ij} , es parametrizando las siguientes rectas: la recta vertical que pasa por el punto (i, j) , la recta horizontal que pasa por el punto (i, j) y las rectas diagonales con pendientes 1 y -1 que pasan por (i, j) . En la figura 4 se puede observar la gráfica y las ecuaciones de estas cuatro rectas.

Todas las configuraciones de 2 reinas en el tablero con una de ellas en la posición (i, j) que se comen entre ellas, corresponden a los siguientes monomios de grado 2:

$$\begin{cases} x_{ij}x_{ik} & 1 \leq k \leq 8, \\ x_{ij}x_{kj} & 1 \leq k \leq 8, \\ x_{ij}x_{k(k-i+j)} & \max\{1, 1+i-j\} \leq k \leq \min\{8, 8+i-j\}, \\ x_{ij}x_{k(i+j-k)} & \max\{1, i+j-8\} \leq k \leq \min\{8, i+j-1\}. \end{cases}$$

Para cada $1 \leq i, j \leq 8$, definamos A_{ij} como la unión de los siguientes cuatro conjuntos:

$$\begin{aligned} & \{x_{ij}x_{ik} : 1 \leq k \leq 8\}, \\ & \{x_{ij}x_{kj} : 1 \leq k \leq 8\}, \\ & \{x_{ij}x_{k(k-i+j)} : \max\{1, 1+i-j\} \leq k \leq \min\{8, 8+i-j\}\}, \\ & \{x_{ij}x_{k(i+j-k)} : \max\{1, i+j-8\} \leq k \leq \min\{8, i+j-1\}\}. \end{aligned}$$

Consideremos el ideal

$$I = \left\langle \bigcup_{1 \leq i, j \leq 8} A_{ij} \right\rangle.$$

Notemos que este ideal es monomial, ya que es generado por monomios, por lo tanto es homogéneo, y entonces R/I es un anillo graduado.

Por otro lado, note que un monomio de grado 8 corresponde a una solución del problema, es decir, a una configuración de 8 reinas que no se comen entre ellas, si y solo si, dicho monomio no pertenece al ideal I . Esto ya que si un monomio m de grado 8 pertenece a I , entonces es divisible por uno de los generadores de I , lo que implica que el monomio tiene dos variables que corresponden a posiciones de reinas que se comen. Recíprocamente, si m no pertenece a I , entonces ningún par de variables que aparecen en el monomio m pueden ser elementos del conjunto de generadores de I , y esto significa precisamente que las 8 reinas ubicadas en las posiciones correspondientes a las variables del monomio m , no se comen entre ellas.

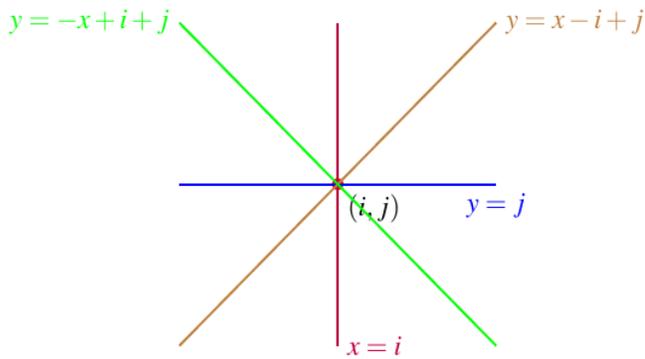


Figura 4: Gráfica de las cuatro rectas que codifican las posiciones del tablero que corresponden a reinas que se comen con la reina ubicada en la casilla marcada con la variable x_{ij} .

Ejercicio 2. Sabemos que R/I es un \mathbb{Q} -espacio vectorial. Demuestre que en este caso R/I tiene dimensión finita como \mathbb{Q} -espacio vectorial y que además su graduación es finita, más aún,

$$R/I = (R/I)_0 \oplus (R/I)_1 \oplus \cdots \oplus (R/I)_8.$$

De lo anterior tenemos entonces que los monomios de R de grado 8 que no están en I , son precisamente los de una base del \mathbb{Q} -espacio vectorial $(R/I)_8$, por lo tanto la dimensión como \mathbb{Q} -espacio vectorial de $(R/I)_8$ nos da el número de configuraciones distintas de 8 reinas en un tablero de ajedrez que no se comen entre ellas. Más aún, si computamos una base para $(R/I)_8$, obtenemos dichas configuraciones.

Cómputo de $\dim_{\mathbb{Q}}(R/I)_8$ usando Macaulay2.

1. $L=()$
crea una secuencia vacía.
2. for i from 1 to 8 do for j from 1 to 8 do
 $L=\text{append}(L,x_{\{i,j\}})$
crea la secuencia con las 64 variables, una por cada casilla del tablero de ajedrez.
3. $R=\mathbb{Q}[L]$
crea el anillo de polinomios con coeficientes en \mathbb{Q} en las 64 variables anteriores.
4. $H=()$
crea una secuencia vacía.
5. for i from 1 to 8 do for j from 1 to 8 do for k from 1 to 8 do
 $H=\text{append}(H,x_{\{i,j\}}*x_{\{i,k\}})$.
6. for i from 1 to 8 do for j from 1 to 8 do for k from 1 to 8 do
 $H=\text{append}(H,x_{\{i,j\}}*x_{\{k,j\}})$.

7. for i from 1 to 8 do for j from 1 to 8 do
for k from $\max\{1,1+i-j\}$ to $\min\{8,8+i-j\}$ do
 $H=\text{append}(H,x_{\{i,j\}}*x_{\{k,k+i-j\}})$.

8. for i from 1 to 8 do for j from 1 to 8 do
for k from $\max\{1,i+j-8\}$ to $\min\{8,i+j-1\}$ do
 $H=\text{append}(H,x_{\{i,j\}}*x_{\{k,i+j-k\}})$.

Los últimos cuatro pasos producen la secuencia de generadores del ideal I .

9. $I=\text{ideal } H$
produce el ideal I .

10. $s=\text{hilbertSeries } I$
produce la serie de Hilbert del anillo cociente R/I como un cociente de polinomios.

11. $\text{reduceHilbert } s$
produce la serie de Hilbert del anillo R/I .

Al realizar los pasos anteriores en Macaulay2, finalmente el comando $\text{reduceHilbert } s$ produce el polinomio

$$p(T) = 1 + 64T + 1288T^2 + 10320T^3 + 34568T^4 + 46736T^5 + 22708T^6 + 3192T^7 + 92T^8,$$

donde el coeficiente que acompaña a la potencia T^8 es la dimensión de $(R/I)_8$ como \mathbb{Q} -espacio vectorial.

De esta manera concluimos que existen 92 maneras distintas de ubicar 8 reinas en un tablero de ajedrez sin que se coman entre ellas.

Observación 4. En el polinomio obtenido en el algoritmo anterior, notemos que los coeficientes de cada potencia T^i con $1 \leq i \leq 8$ nos indican de cuántas maneras se pueden ubicar i reinas en un tablero de ajedrez sin que se coman entre ellas. Por ejemplo, como el coeficiente de T^7 es 3192, esto nos dice que existen 3192 formas distintas de ubicar 7 reinas en un tablero de ajedrez sin que se coman entre ellas.

Generalización del problema.

Notemos que en el procedimiento anterior, no importó realmente el tamaño del tablero ni el número de reinas. Por lo tanto, dado un tablero $n \times n$, podemos usar el mismo procedimiento para entontrar de cuántas maneras se pueden ubicar m reinas sin que se coman entre ellas.

El procedimiento sería entonces construir el anillo de polinomios en n^2 variables, definir el ideal I generado por todos los productos de dos variables que correspondan a posiciones donde las reinas se coman, luego considerar el anillo graduado R/I , y finalmente computar la dimensión de $(R/I)_m$ como \mathbb{Q} -espacio vectorial, lo que nos daría como resultado el número de formas distintas en que es posible ubicar m reinas en el tablero $n \times n$ sin que se coman entre ellas.

Finalmente, observe que tampoco es importante que el tablero sea cuadrado, por lo tanto se puede plantear el mismo problema y solucionarlo de la misma manera, para un tablero de tamaño $m \times n$.

Referencias.

- [Lan12] Serge Lang, *Algebra*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [Eis13] David Eisenbud, *Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [Ati18] Michael Atiyah, *Introduction to commutative algebra*, CRC Press, 2018.

Acerca del autor: El profesor Juan Pablo trabaja en las áreas de álgebra conmutativa, álgebra homológica y geometría algebraica, y tiene un interés en general por la matemática y las aplicaciones de esta ciencia a otras áreas. Amante de la guitarra clásica.

¿CICLOIDE, BRAQUISTÓCRONA O TAUTÓCRONA?

Reynaldo Castaneira Ramírez*
reynaldo.cr@itoaxaca.edu.mx

1. Resumen.

En este escrito presentamos brevemente una monografía de la cicloide: su origen, denominación e interpretación como solución a diferentes problemas planteados por grandes personajes a través de la historia de las matemáticas.

2. Introducción.

El presente escrito fue motivado por simple curiosidad sobre el origen de la curva “conocida” como cicloide. A través de mi breve paso por las matemáticas me ha resultado perturbador encontrarme esta curva en varios contextos, con propiedades sorprendentemente elegantes y una historia singular. La cicloide ha sido descubierta algunos siglos atrás, estando incluso en la naturaleza misma como lo menciona Johann Bernoulli. Fue en el siglo XVII cuando esta curva se manifestó por primera vez en los diversos estudios de grandes personajes en la historia de la ciencia (B. Pascal, C. Huygens, G. Galilei, G. Leibniz, Johann Bernoulli, G. L'Hôpital, Jakob Bernoulli, I. Newton, L. Euler, J-L Lagrange, entre otros). En aquellos tiempos, sin exclusión actual, muchos de los problemas de estudio eran básicamente sucesos o fenómenos que se presentaban en el “mundo real” e incluso que se podían comprobar experimentalmente. Por esta razón, no es que se estudiara la cicloide como tal, sino que ésta surgió más bien como respuesta natural a distintos problemas planteados. Para entender la aparición de la cicloide en diversos contextos, el escrito se estructura de la siguiente manera: en la sección 2 presento la cicloide y algunas de las propiedades intrínsecas de la curva utilizando herramientas actualmente bien conocidas, como el cálculo diferencial e integral.¹ En la sección 3 abordamos el problema de la tautócrona planteado por C. Huygens y tratamos de justificar su resultado, el cual obtuvo experimentalmente. Finalmente, en la sección 4 estudiamos el reto de la braquistócrona planteado por J. Bernoulli, lanzado a la comunidad científica europea de aquellos tiempos, y esbozamos la solución presentada por él mismo.

*Departamento de Ciencias Básicas, Tecnológico Nacional de México / I.T. de Oaxaca

¹Recordemos que en el siglo XVII, el cálculo aún se encontraba en una etapa prematura y desconocida para muchos de los personajes de la época.

3. Cicloide.

En matemáticas, entendemos por *cicloide* a la curva descrita por un punto de la circunferencia, cuando ésta rueda sin resbalar sobre una recta.

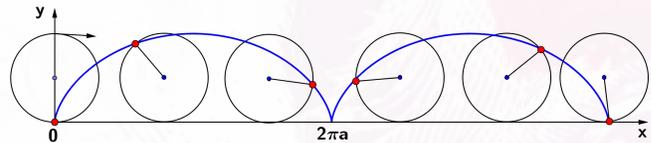


Figura 1: Cicloide generada por una circunferencia rodando sobre el eje x.

El origen de esta curva es incierto. Los historiadores de la matemática atribuyen a diferentes personajes del siglo XVI su descubrimiento e incluso se citan documentos que sugieren que la curva probablemente era conocida en la antigüedad. Sin embargo, dada la incertidumbre se han generado grandes disputas por el título, por esta razón la cicloide es conocida como *La Helena de los geómetras*, aunque al parecer fue hasta finales del siglo XVI en que Galileo acuñó el término cicloide y fue el primero en hacer estudios rigurosos de la curva [IHM94, WEA43].

Si la cicloide se genera mediante una circunferencia de radio a que se apoya sobre el eje x en el origen, su representación en forma paramétrica está dada por:

$$x(\theta) = a(\theta - \sin \theta), \quad y(\theta) = a(1 - \cos \theta), \quad a > 0,$$

donde θ es el parámetro correspondiente al ángulo de giro del círculo rodante.

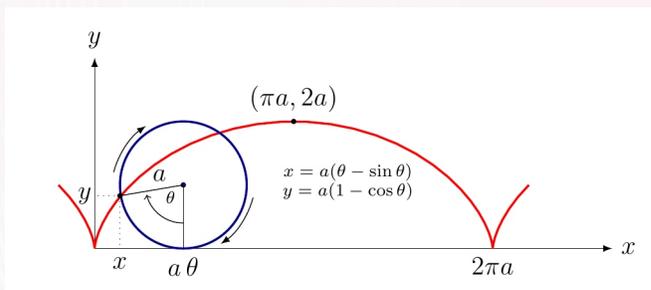


Figura 2: Parametrización de la cicloide.

La Figura 2 muestra el primer arco de la cicloide para un

círculo de radio a . Para un ángulo θ fijo, el centro de la circunferencia está en el punto $(x, y) = (a\theta, a)$, las intersecciones con el eje x ocurren en los puntos donde

$$y(\theta) = a(1 - \cos \theta) = 0,$$

es decir, cuando θ es un múltiplo entero de 2π . Podemos obtener la forma paramétrica de la cicloide en coordenadas cartesianas despejando el parámetro θ en y y sustituyendo en x :

$$x = a \arccos \left(1 - \frac{y}{a} \right) - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Observe que esta fórmula sólo es válida para $y \in [0, 2a]$ y nos da la mitad del primer arco de la cicloide. En este caso, tenemos $x = f(y)$. ¿Puede usted obtener $y = g(x)$?

El área limitada por el primer arco de la cicloide y el eje x es

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi a} y dx &= \int_0^{2\pi} y(\theta) x'(\theta) d\theta, \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos \theta)^2 d\theta, \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta, \\ &= a^2 \left(\theta - 2\sin \theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{2\pi}, \\ &= 3\pi a^2. \end{aligned}$$

Así el área bajo el primer arco la cicloide es tres veces la del círculo giratorio (πa^2).²

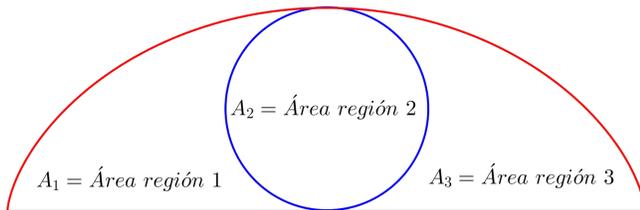


Figura 3: $A_1 = A_2 = A_3 = \pi a^2$.

Por otro lado, como

$$\begin{aligned} [x'(\theta)]^2 &= [a(1 - \cos \theta)]^2 = a^2(1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta), \\ [y'(\theta)]^2 &= [a \sin \theta]^2 = a^2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

²Hacia 1632, Roberval(1602-1675) había obtenido un método similar al método de los indivisibles de Cavalieri. Roberval ocupó desde 1632 hasta su muerte una cátedra en el Collège Royal de París y al parecer prefirió no hacer públicos sus métodos para conservar dicha cátedra. Por esta razón, se vio envuelto en diversas polémicas relacionadas con la autoría de varios resultados matemáticos. En particular, en 1634, logró calcular el área encerrada por un arco de cicloide usando su método de indivisibles, hallando que, en efecto, el área encerrada por un arco de cicloide era igual al triple del área del círculo que genera la cicloide. La no publicación de estos resultados le involucraría posteriormente en una desagradable disputa con Evangelista Torricelli (1608-1647), [HC86].

la longitud de arco de la cicloide parametrizada hasta $\theta = \alpha$ es

$$s = \int_0^\alpha \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} d\theta = \int_0^\alpha \sqrt{2a^2(1 - \cos \theta)} d\theta.$$

Ahora usando la identidad trigonométrica

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2},$$

con $t = \theta/2$ tenemos que

$$\sin^2(\theta/2) = \frac{1 - \cos \theta}{2}.$$

Así, de la última integral resulta

$$\begin{aligned} s &= \int_0^\alpha \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} d\theta, \\ &= 2a \int_0^\alpha \sqrt{\sin^2(\theta/2)} d\theta, \\ &= 2a \int_0^\alpha |\sin(\theta/2)| d\theta, \quad \sin(\theta/2) \geq 0, \alpha \in [0, 2\pi], \\ &= 2a \int_0^\alpha \sin(\theta/2) d\theta, \\ &= 2a [-2\cos(\theta/2)] \Big|_0^\alpha, \\ &= 4a(1 - \cos(\alpha/2)), \\ &= 8a \operatorname{sen}(\alpha/4). \end{aligned}$$

Entonces, la longitud del primer arco de la cicloide ($\alpha = 2\pi$), es $8a$. Así resulta que la longitud del primer arco de la cicloide es 8 veces el radio (o 4 veces el diámetro) del círculo giratorio.³

El área de la superficie que se forma al hacer girar el primer

³En 1637, a la temprana edad de 14 años, el joven Blaise Pascal comienza a asistir con asiduidad a las reuniones organizadas por Mersenne en París. Tras obtener nuevos resultados relacionados con la curva cicloide, Pascal decide plantear un reto, en el que se debían responder cuestiones relacionadas con el centro de gravedad de la región plana encerrada por la cicloide, así como con el volumen y área lateral de los sólidos obtenidos por revolución de dicha curva respecto a un eje. La resolución definitiva de las cuestiones planteadas por Pascal tuvieron que esperar a la aparición de la obra *Histoire de la roulette*, publicada por el propio Pascal a finales de ese año.

Una vez cerrado el plazo de presentación de propuestas al concurso convocado por Pascal, el arquitecto inglés Christopher Wren (1632-1723) comunicaría a Pascal un novedoso resultado sobre la cicloide. Wren había logrado la rectificación de la cicloide, hallando que la longitud de un arco de cicloide era igual a cuatro veces el diámetro de la circunferencia que genera la curva.

arco de la cicloide alrededor del eje x está dado por

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi a} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \\ &= \int_0^{2\pi} 2\pi y(\theta) \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} d\theta, \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos \theta) \cdot 2a \sin \frac{\theta}{2} d\theta, \\ &= 8a^2 \pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{\theta}{2} d\theta, \\ &= 16a^2 \pi \int_0^{\pi} \sin^3 u du, \\ &= 16a^3 \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 u) \sin u du, \\ &= 16a\pi \left(-\cos u + \frac{1}{3} \cos^3 u\right) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{64}{3} \pi a^2. \end{aligned}$$

Cuando se estudia una curva plana existen diversas maneras de definir otras asociadas a ella, tal como la *evoluta* e *involuta*, las cuales surgen en aplicaciones de manera natural. Para nuestros fines, aquí sólo estudiamos la evoluta.

Sea $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ una curva sin puntos de inflexión (es decir, puntos donde los valores de una función continua en x pasan de un tipo de concavidad a otra). Se define la *evoluta* σ_E de σ como la curva con representación

$$\sigma_E(t) = \sigma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \mathbf{n}(t),$$

donde $\mathbf{n}(t)$ es el vector normal a la curva $\sigma(t)$ y $t \in I$.

Para cada $t_0 \in I$ la circunferencia osculatriz (la mejor aproximación a la curva en un punto por circunferencias) a la curva $\sigma(t_0)$ tiene centro $\sigma_E(t_0)$ y radio $\rho = 1/\kappa(t_0)$ llamado radio de curvatura (el radio del arco circular que mejor aproxima la curva en dicho punto), donde $\kappa(t_0)$ es la curvatura (medida de qué tanto se desvía la curva de una línea recta) en el punto $\sigma(t_0)$. Las curvas tienen la misma tangente en el punto de contacto. Por lo tanto, la evoluta corresponde al lugar geométrico de los centros de curvatura $\sigma_E = (\xi, \eta)$ de σ están dados explícitamente por las expresiones

$$\begin{aligned} \xi &= x - y \frac{\dot{x}^2 + y^2}{\dot{x}\dot{y} - y\dot{x}}, \\ \eta &= y + x \frac{\dot{x}^2 + y^2}{\dot{x}\dot{y} - y\dot{x}}. \end{aligned}$$

Se puede demostrar, de manera sencilla, que para la elipse $\sigma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$, $0 < a < b$ se cumple que

$$\sigma_E(t) = (\xi, \eta) = \left(\left(\frac{a^2 - b^2}{a}\right) \cos^3 t, \left(\frac{b^2 - a^2}{b}\right) \sin^3 t \right),$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Una expresión implícita de esta curva está dada por

$$\left(\frac{a\xi}{a^2 - b^2}\right)^{2/3} + \left(\frac{b\eta}{a^2 - b^2}\right)^{2/3} = 1,$$

por lo que la evoluta para la elipse es un asteroide (asimétrico).

Retomando la curva de nuestro interés, tenemos que la evoluta de la cicloide está descrita por los centros de curvatura (ξ, η) donde

$$\begin{aligned} \xi &= a(\theta + \sin \theta), \\ \eta &= a(-1 + \cos \theta). \end{aligned}$$

Observe que si tomamos $\phi = \theta - \pi$, entonces

$$\begin{aligned} \xi - a\pi &= a(\phi - \sin \phi), \\ \eta + 2a &= a(1 - \cos \phi). \end{aligned}$$

Estas ecuaciones muestran que la evoluta de la cicloide es a su vez una cicloide similar a la original simplemente trasladada al punto $(a\phi, -2a)$.

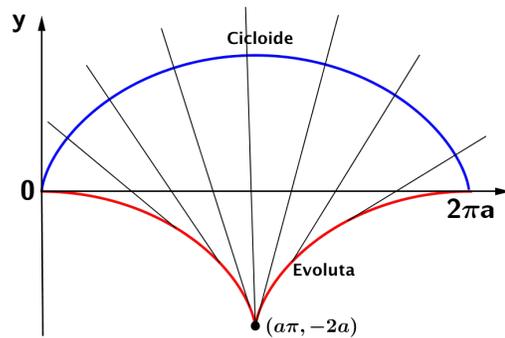


Figura 4: Primer arco de la cicloide y su evoluta.

4. Tautócrona.

Una *tautócrona* (*isocróna*) (del griego, *tauto-mismo* y *chrono-tiempo*) es la curva para la cual el tiempo tomado por un objeto, que desliza sin rozamiento y sólo actuando la gravedad, hasta llegar a su punto más bajo es independiente de su punto de partida.

En 1658, el astrónomo, físico y matemático holandés Christiaan Huygens (1629-1695) trataba de mejorar el diseño de los relojes de péndulo, cuando inspirado por el reto de Pascal, estudia el periodo de un péndulo forzado a seguir una trayectoria cicloidal, descubriendo que éstos son isócronos. Huygens descubre en base a consideraciones geométricas que la curva cicloide invertida es una curva tautócrona (isocrona). El problema de la tautócrona, fue resuelto geoméricamente por Christiaan Huygens en 1659, aunque fue publicado hasta 1673 en su obra *Horologium oscillatorium*.

En una cicloide cuyo eje se eleva sobre la perpendicular y cuyo vértice está localizado en el fondo, el tiempo de descenso en el cual un cuerpo llega al punto más bajo, al vértice, después de haber partido desde cualquier punto de la cicloide, es igual a cualquier otro.

Las ecuaciones de la cicloide y evoluta invertidas son:

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(-1 + \cos \theta), \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = a(\theta + \sin \theta), \\ \eta = a(1 - \cos \theta). \end{cases}$$

Respectivamente. Si denotamos a $P = (a(\pi + \sin \pi), a(1 - \cos \pi)) = (a\pi, 2a)$ y $M = (a(\theta + \sin \theta), a(1 - \cos \theta))$ puntos sobre la evoluta invertida y $N = (a(\theta - \sin \theta), a(-1 + \cos \theta))$ sobre la cicloide invertida, como en la Figura 5.

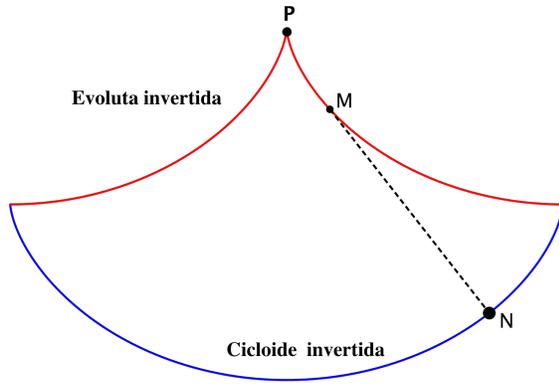


Figura 5: Cicloide invertida y evoluta invertida.

Observe que la distancia entre el punto M y N está dada por

$$\begin{aligned} |MN| &= \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}, \\ &= \sqrt{(2a \sin \theta)^2 + (2a - 2a \cos \theta)^2}, \\ &= 2\sqrt{2}a\sqrt{1 - \cos \theta}, \\ &= 4a \sin(\theta/2). \end{aligned}$$

Mientras que la longitud de arco entre los puntos P y M es

$$\begin{aligned} \text{Arco}(PM) &= \int_{\theta}^{\pi} \sqrt{\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)^2} d\theta, \\ &= \int_{\theta}^{\pi} \sqrt{(a + a \cos \theta)^2 + (-a \sin \theta)^2} d\theta, \\ &= \int_{\theta}^{\pi} \sqrt{2a^2(1 + \cos \theta)} d\theta, \\ &= 4a \int_{\theta}^{\pi} \cos(\theta/2) d\theta, \\ &= 4a(1 - \sin(\theta/2)). \end{aligned}$$

De donde obtenemos,

$$\text{Arco}(PM) + |MN| = 4a. \quad (1)$$

Por otro lado, si en la cicloide dejamos caer un objeto desde el punto A hasta un punto B , como en la Figura 6, por la ley de caída libre (ley de Galileo), llegará con una velocidad

$$v = \sqrt{2gh} \quad \text{donde} \quad h = y_B - y_A = a(\cos \beta - \cos \alpha).$$

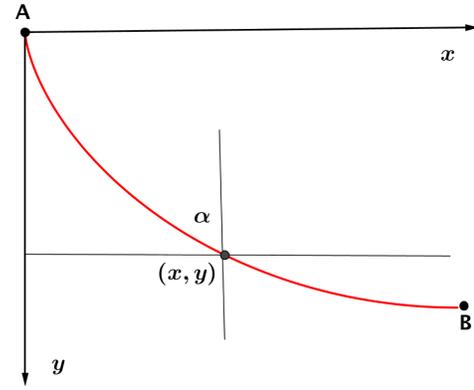


Figura 6: El objeto cae desde el punta A hasta el punto B. Como

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \cos^2(\beta/2) - \sin^2(\beta/2) = 2 \cos^2(\beta/2) - 1, \\ \cos \alpha &= 2 \cos^2(\alpha/2) - 1, \end{aligned}$$

tenemos que

$$v = \sqrt{2gh} = 2\sqrt{ga} \sqrt{\cos^2(\beta/2) - \cos^2(\alpha/2)}.$$

Usando que la velocidad es el desplazamiento entre el tiempo,

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad \text{donde} \quad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} d\alpha = 2a \sin(\alpha/2) d\alpha.$$

Así,

$$dt = \frac{ds}{v} = \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{\sin(\alpha/2)}{\sqrt{\cos^2(\beta/2) - \cos^2(\alpha/2)}} d\alpha.$$

Por lo tanto, tenemos que el tiempo que le toma al objeto en la caída por la cicloide desde el punto A al punto más bajo B es

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\beta}^{\pi} \frac{\sin(\alpha/2)}{\sqrt{\cos^2(\beta/2) - \cos^2(\alpha/2)}} d\alpha, \quad u := \cos(\alpha/2), \\ &= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\cos(\beta/2)}^0 \frac{-2du}{\sqrt{\cos^2(\beta/2) - u^2}}, \quad (\beta = 0, \text{ si } A=(0,0)), \\ &= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^1 \frac{2du}{\sqrt{1 - u^2}}, \\ &= -2\sqrt{\frac{a}{g}} [\arccos u]_0^1, \\ &= \pi \sqrt{\frac{a}{g}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Huygens fue el primero en descubrir esta propiedad (experimentalmente) en 1673 y en darle una aplicación práctica. Huygens había estudiado a fondo los relojes de péndulo y observó que cuando un reloj tiene una variación en la amplitud de la oscilación del péndulo, entonces deja de contar el tiempo correctamente [HC86]. Pero si la lenteja del péndulo se moviese no en una circunferencia, como en el péndulo normal, sino a lo largo de una cicloide, entonces aunque la amplitud

de oscilación fuera mayor o menor, el período del péndulo seguiría siendo el mismo, como hemos visto en la ecuación (2).

Años más tarde, los *métodos infinitesimales* de Leibniz (1646-1716) ejercerían una profunda influencia en los matemáticos europeos. En particular, su discípulo suizo Jakob Bernoulli (1654-1705) publicaría en mayo de 1690 un trabajo en la revista *Acta Eruditorum* donde establece la propiedad tautócrona de la cicloide haciendo uso del cálculo diferencial e integral. Jakob Bernoulli mostró que el problema de la curva tautócrona se reducía a la resolución de una ecuación diferencial de primer orden. Los trabajos de Jakob en 1690 fueron relevantes para la historia del cálculo infinitesimal, la denominación *integral* surge por primera vez con su sentido actual como proceso inverso a la *diferenciación*.

5. Braquistócrona.

El problema de la braquistócrona (del griego *brachistos*-más corto, *chronos*-tiempo) fue propuesto por Johann Bernoulli en *Acta Eruditorum* en Junio de 1696. La introducción del problema fue:

Yo, Johann Bernoulli, me dirijo a los matemáticos más brillantes del mundo. Nada es más atractivo para las personas inteligentes que un problema honesto y desafiante, cuya posible solución otorgará fama y permanecerá como un monumento duradero. Siguiendo el ejemplo de Pascal, Fermat, etc., espero ganarme el agradecimiento de toda la comunidad científica poniendo ante los mejores matemáticos de nuestro tiempo un problema que pondrá a prueba sus métodos y la fuerza de su intelecto. Si alguien me comunica la solución del problema propuesto, lo declararé públicamente digno de elogio.

El enunciado del problema que Johann propuso fue: *Dados dos puntos⁴ A y B en un plano vertical, ¿cuál es la curva trazada por un punto sobre el que actúa solo la gravedad, que comienza en A y llega a B en el menor tiempo?*

Al final, fueron Jakob Bernoulli (hermano de Johann), Leibniz, Newton y L'Hôpital las únicas personas que resolvieron correctamente el problema [IHM94].

Presentamos aquí sólo la solución de Johann, él divide el plano en tiras suficientemente delgadas y asume que la partícula sigue una línea recta en cada tira.

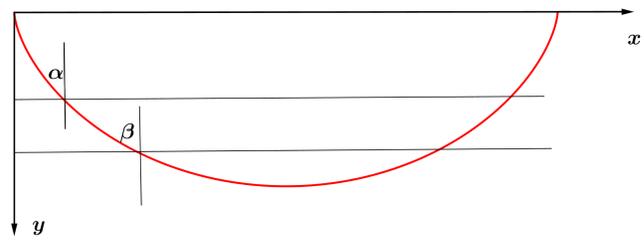
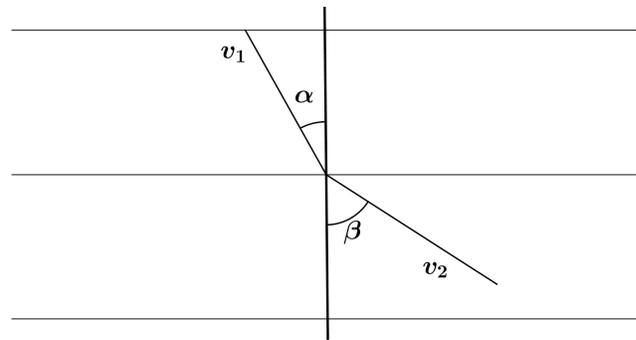


Figura 7: Dos puntos en diferentes tiras con sus respectivos ángulos asociados.

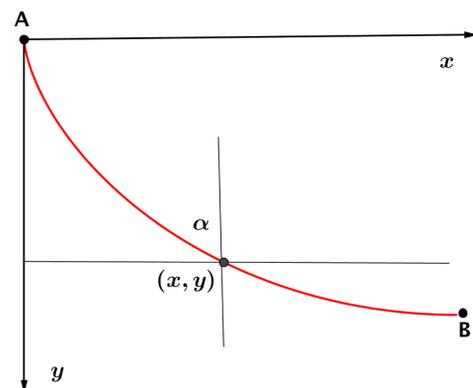
La trayectoria entonces son pedazos de líneas. El problema es determinar el ángulo de la línea (segmento) en cada tira. Para hacer esto él recurrió al *principio de Fermat*, el cual establece que la luz viaja de un punto a otro en el mínimo tiempo posible. También se sabe que la luz tiene velocidades distintas en medios distintos.



Entonces, si v es la velocidad en una tira con ángulo α respecto a la vertical y u la velocidad en la siguiente tira con ángulo β , de acuerdo a la ley de refracción o ley de Snell:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{v} = \frac{\text{sen } \beta}{u}.$$

En el límite, cuando las tiras son cada vez más finas los segmentos de las líneas tienden a una curva donde en cada punto (x,y) el ángulo y el segmento con la vertical es el ángulo de la tangente con la vertical



Si v es la velocidad en el punto (x,y) y α es el ángulo que

⁴Sin pérdida de generalidad, el punto A debe estar más arriba que B.

la tangente hace con la vertical entonces la curva satisface

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{v} = c, \quad c \text{ constante.} \quad (3)$$

Luego por la ley de Galileo: la velocidad v de descenso de un cuerpo es proporcional a la raíz cuadrada de la distancia desde donde cae, esto es, v satisface

$$v = \sqrt{2gy},$$

donde g es la aceleración debido a la gravedad. Así, al sustituir v en (3) tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{2gy}} = c, \quad \text{equivalentemente} \quad \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{2gy} = c^2,$$

por lo tanto

$$y = k^2 \operatorname{sen}^2 \alpha, \quad k^2 = 1/(2gc^2). \quad (4)$$

Por otro lado, de la figura anterior, observe que

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cot \alpha,$$

y

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha}} = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{1 + (y')^2}. \quad (5)$$

De las ecuaciones (3) y (5) se obtiene que la curva y (independiente de α) debe satisfacer la ecuación diferencial:

$$y(1 + (y')^2) = k^2. \quad (6)$$

Probemos ahora que la cicloide satisface esta ecuación diferencial. En efecto, si $x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)$ y $y = a(1 - \cos \theta)$ entonces

$$y' = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{-\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta}.$$

$$\begin{aligned} y(1 + (y')^2) &= a(1 - \cos \theta) \left[1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2} \right], \\ &= a(1 - \cos \theta) \left[\frac{(1 - \cos \theta)^2 + \operatorname{sen}^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2} \right], \\ &= 2a. \end{aligned}$$

Así, la cicloide satisface la ecuación diferencial (6) con $k = \sqrt{2a}$.

Johann termina su solución del problema de la Braquistócrona con las siguientes palabras:

Antes de terminar, debo expresar una vez más la admiración que siento por la inesperada identidad de la tautócrona de Huygens y mi braquistócrona. Considero especialmente notable que esta coincidencia sólo pueda tener lugar bajo la hipótesis de Galileo, de modo que incluso obtenemos de esto una prueba de su corrección. La naturaleza siempre tiende a actuar de la manera más simple, por lo que aquí permite que una curva sirva para dos funciones diferentes, mientras

que bajo cualquier otra hipótesis deberíamos necesitar dos curvas ...

Johann Bernoulli no fue el primero en considerar el problema de la braquistócrona, aunque fue él quien acuñó el nombre. Galileo en 1638 había estudiado el problema en su famosa obra *Discourse on two new sciences* [GG58]. Su versión del problema consistía primero en encontrar la línea recta desde un punto A hasta el punto de una línea vertical al que llegaría más rápido. Determinó correctamente que tal línea de A a la línea vertical estaría en un ángulo de 45° , alcanzando la línea vertical requerida en un punto, B.

Calculó el tiempo necesario para que el punto se moviera de A a B en línea recta, luego mostró que el punto alcanzaría B más rápidamente si viajaba a lo largo de los dos segmentos de línea AC seguido de CB, donde C es un punto en un arco de un círculo.

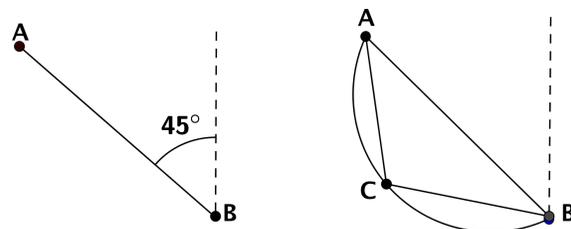


Figura 8: Problema considerado por Galileo.

Aunque Galileo estaba perfectamente en lo cierto en esto, luego cometió un error cuando argumentó que el camino de descenso más rápido de A a B sería un arco de un círculo, lo cual fue una deducción incorrecta como acabamos de ver. El método de resolución propuesto por Jakob Bernoulli, el cual no mostramos aquí, para el problema de la Braquistócrona, es mucho más general que la solución propuesta por su hermano Johann y ejerció una profunda influencia en Leonhard Euler (1707-1783), quien, junto a J. L. Lagrange (1736-1813), instauraría las bases de lo que actualmente conocemos como *Cálculo de Variaciones*.

Para profundizar en esta temática se pueden consultar [IHM94, WEA43, GG58, HC86] y las referencias que allí se encuentran. También se podrá encontrar material interesante en los siguientes sitios de la web:

1. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Brachistochrone/>
2. <http://www.mat.ucm.es/cosasmdg/cdsmdg/05edumat/geometriahoy/experimentosgeom/ecua.htm>
3. <https://en.wikipedia.org/wiki/Cycloid>
4. <http://historiasdematematicas.blogspot.com/2017/04/historia-de-la-cicloide.html>

Agradecimientos.

El autor agradece al editor y al referi anónimo por sus valiosas observaciones.

Referencias.

- [IHM94] Icaza Herrera M., *Galileo, Bernoulli, Leibniz and Newton around the brachistochrone problem*, Rev. Mexicana Fis., 1994.
- [WEA43] Whitman E. A., *Some Historical Notes on the Cycloid*, The American Mathematical Monthly, 1943.
- [GG58] Galileo G., *Dialogues Concerning Two New Science*, Dover Publications, Inc., New York, 1958. Translation by Henry Crew and Alfonso de Salvio of DISCORSI E DIMOSTRAZIONI MATEMATICHE, intorno 'a due nuoue scienze, Elsevier, Leiden, 1638; first published by Macmillan, 1914.
- [HC86] Huygens C., *The Pendulum Clock or Geometrical Demonstrations Concerning the Motion of Pendula (sic) as Applied to Clocks*, Iowa State University Press (Ames, Iowa, USA), 1986. Translated by R. J. Blackwell.
- [TGJ99] Tee G. J., *Isochrones and brachistochrones*, Neural Parallel Sci. Comput., 1999.

Acerca del autor: Reynaldo es docente del Departamento de Ciencias Básicas en el Instituto Tecnológico de Oaxaca, le apasiona contemplar la naturaleza y sembrar árboles. Otras de las cosas que espera es ver crecer a sus niños y leer algunos libros, que aún esperan por abrirse.

VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE UTILIZAR LOS MODELOS DE FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

César Augusto Lara Santana *
cesara.laras@konradlorenz.edu.co

Resumen

Los Modelos de Función de Transferencia (MFT) son un tipo de modelos matemáticos de enfoque probabilístico que permiten responder a necesidades de cuantificación de la magnitud, sentido y duración de los impactos entre variables estadísticas que se analizan en diferentes áreas del conocimiento. Estos modelos tienen la capacidad de poder identificar si existen series de tiempo que tienen correlaciones lineales tanto en el mismo momento de observación como en rezagos temporales. Así, el presente documento busca ilustrar las ventajas y desventajas de utilizar este objeto matemático, el cual incluye las principales definiciones, procedimiento metodológico y resultados de una aplicación de un MFT sobre fenómenos económicos. La transformación de datos, modelamiento y despliegue se hace con el software libre R junto a las librerías, "TSA", "tseries", y "forecast".

1. Introducción.

En diferentes sectores de la sociedad, el análisis de fenómenos involucra comprender y proyectar el comportamiento de variables y sus respectivas interacciones. Producto de estos análisis multivariados, surgen preguntas, de las cuales se pueden mencionar algunos ejemplos, tales como: ¿Si aumentan las tasas de interés de los bancos, esto podría afectar la inflación? ¿Si aplicamos un medicamento veterinario sobre determinado grupo animal, cuando se observarán los efectos? ¿Por cuánto tiempo durarán los efectos significativos? ¿Los efectos serán positivos o negativos?

Dado que estas preguntas conducen a proyectar el comportamiento de fenómenos bajo incertidumbre, se ha propuesto el presente artículo con el fin de introducir los conceptos de MFT como una alternativa probabilística para responder a una pregunta central: ¿Es posible modelar matemáticamente la magnitud, sentido y duración de las relaciones entre diferentes variables en diferentes momentos?

El presente artículo está compuesto por cuatro secciones: inicialmente, se presenta una introducción a los conceptos y definiciones necesarias para abordar los Modelos de Función de Transferencia (MFT). En la segunda sección, se describirá el conjunto de datos y series de tiempo contemplados para

abordar el fenómeno. En la tercera sección se ilustran los resultados del MFT, incluyendo la extrapolación del modelo en una muestra posterior a la ventana de entrenamiento utilizada en la segunda sección. Finalmente, se abordan las conclusiones tanto en las ventajas y desventajas de implementar un MFT como en los resultados obtenidos para el conjunto de datos empleado en el presente ejercicio.

2. Conceptualización.

Como conceptos preliminares, los MFT se enmarcan en las técnicas probabilísticas para el modelamiento matemático. Estos modelos son herramientas de la estadística aplicada cuya utilidad radica en que puede ser empleada para modelar el comportamiento de una variable de respuesta a través de los impactos no contemporáneos de una o varias variables exógenas teniendo presente el factor *tiempo*. Algunos ejemplos de este tipo de modelos pueden ser:

- Modelar el nivel de lluviosidad en una región específica en función de la humedad, corrientes de viento y presión atmosférica observado en minutos, horas o días previos.
- Establecer el impacto en los cambios de nivel de glucosa de la sangre humana a partir del cambio de ingesta de azúcares y carbohidratos horas previas.
- Observar el porcentaje de la variación del Producto Interno Bruto (PIB) teniendo presente el comportamiento ponderado de los precios internacionales de los productos exportables en semanas o meses anteriores.

A continuación, se enuncian algunos de los principales conceptos necesarios para abordar integralmente este concepto:

Definición 2.1 (Serie de Tiempo). Es una variable aleatoria x_t definida dentro del espacio de estados de un proceso estocástico $x \in X$, la cual es medida de manera repetida a lo largo del tiempo [oS22]. Adicionalmente, el conjunto de índices $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ puede ser definido en tiempo continuo o tiempo discreto. Para efectos del presente artículo, se considerará valores de la serie de tiempo medidos en los números reales y el conjunto de índices medidos en tiempo discreto y finito $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, es decir, $x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{Z}^+$. Igualmente,

*Estudiante de Matemáticas, Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Bogotá D.C.-Colombia

se trabajará bajo un modelo básico con una sola variable de respuesta y_t y una sola variable de entrada x_t .

Definición 2.2 (Modelo de Función de Transferencia - MFT). Es un modelo matemático en el cual se define una serie de tiempo específica y_t (entendida como variable de salida) en función de la combinación lineal de las transformaciones de una o varias series de tiempo x_t (entendidas como variables de entrada) medidas bajo el mismo conjunto de índices t [Wei06]. La ecuación funcional de un MFT es:

$$y_t = v(B)x_t + \eta_t \tag{1}$$

donde $v(B)$ es un polinomio o filtro de rezagos que se aplica sobre la variable de entrada y η_t es una serie aleatoria estacionaria, es decir, tanto la media como la varianza de la serie es constante para toda la serie de tiempo. En la literatura estadística, este tipo de modelos es conocido también como los modelos ARMAX [LeB18]. Es importante resaltar que las series x_t, y_t satisfacen las condiciones de estacionariedad (media y varianza constante) con el fin de poder ser objeto de modelación mediante el método ARMA.

Definición 2.3 (Función de Impulso Respuesta - FIR). El polinomio $v(B)$ es un operador de transformación sobre la serie de tiempo x_t (variable de entrada), el cual genera un impulso sobre la serie de tiempo y_t (variable de salida), de la cual se genera una respuesta. La respuesta se calcula mediante esta función polinómica $v(B)$, la cual está compuesta por tres polinomios [Wei06]:

- $\omega(B)$ es el polinomio con los coeficientes de impacto rezagado (B) de x_t sobre la variable. Puede ser interpretado como la duración del efecto de la variable de entrada sobre la variable de salida. Este polinomio es de orden $s \in \mathbb{N}^*$.
- $\delta(B)$ es el polinomio que mide la duración de los impactos autocorrelacionados de y_t sobre sí misma. Es un polinomio de orden $r \in \mathbb{N}^*$.
- b es el orden del rezago en el cual inicia el impacto de la transferencia de la variabilidad entre ambas series de tiempo.
- B es el operador de rezago temporal para series de tiempo de la forma $B(y_t) = y_{t-1}$.

Por extensión, la ecuación (1) puede descomponerse con los diferentes polinomios que constituyen la Función de Impulso-Respuesta (FIR) de la siguiente manera [Sof99]:

$$v(B) = \frac{\omega(B)B^b}{\delta(B)} \tag{2}$$

Donde $\omega(B) = \omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2 - \dots - \omega_s B^s$, $\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r$. Para efectos que el polinomio $v(B)$ sea de orden finito, es necesario que las raíces de $\delta(B)$ tenga sus raíces dentro círculo unitario, dado que este polinomio corresponde al conjunto de impactos de transferencia entre

la serie x_t y y_t [Abr85]. En el caso que $\delta(B)$ no tenga sus raíces dentro del círculo unitario, dicho polinomio no podría ser invertible y en consecuencia $v(B)$ no podría ser estimado.

Es importante considerar que un MFT se considera causal en la medida que los coeficientes, a partir de determinado rezago, tengan valor cero, es decir, $v_j = 0$ para $j < 0$.

Definición 2.4 (Función de Correlación Cruzada - FCC). Es una función que toma valores en el rezago $k \in \mathbb{Z}$ y se obtiene el coeficiente de correlación lineal luego de haber rezagado la variable explicativa k periodos [EC08]. Los rezagos negativos corresponden a impactos originados en y_t y absorbidos por x_t k unidades de tiempo posterior; los rezagos positivos son interpretados como los choques generados en x_t los cuales son recibidos por la variable respuesta y_t hasta los k unidades de tiempo posteriores.

Como función, la FCC puede representarse como se define en [Dí14]:

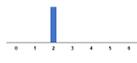
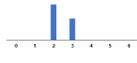
$$\rho: \mathbb{Z} \rightarrow [-1, 1]$$

$$k \mapsto \rho(x_t, y_t, k) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{T} \left[\frac{[x_{t-k} - \mu_x][y_t - \mu_y]}{S_x S_y} \right]. \tag{3}$$

donde μ_x : promedio muestral de la serie x_t , μ_y : promedio muestral de la serie y_t , S_x : desviación estándar de la serie x_t , S_y : desviación estándar de la serie y_t .

Esta función tiene el propósito de identificar la magnitud, signo y duración de las correlaciones parciales intertemporales que sean estadísticamente diferentes a cero entre x_t y y_t a diferentes rezagos. Dependiendo del patrón de decaimiento de las correlaciones cruzadas obtenidas a través del FCC, se puede identificar la forma funcional del polinomio $v(B)$ definido en la ecuación (1).

Con base a lo definido en [Wei06], en las Tablas 1 y 2 se ilustran el comportamiento teórico de algunas combinaciones de la tupla (b, r, s) teniendo rezagos k positivos, es decir, considerando que la variable x_t fluctúa primero que la variable y_t . Estos ejemplos de especificación funcional de $v(B)$ sirven como elemento para identificar la forma funcional de la FIR.

(b, r, s)	$v(B)$	Forma típica
(2,0,0)	$v(B)x_t = \omega_0$	
(2,0,1)	$v(B)x_t = (\omega_0 - \omega_1 B)x_{t-2}$	
(2,0,2)	$v(B)x_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2)x_{t-2}$	

Cuadro 1: Formas funcionales de la FIR para $r = 0$

Como hecho característico, en el Cuadro 1 se observa que cuando $r = 0$, la extensión de la FIR se mantiene por cuantos rezagos s se contemplen después de ocurrido el primer impacto de la función de transferencia en el rezago k . Adicionalmente, cuando $r = 1$, se presenta un proceso de difuminación o decaimiento exponencial del impacto observado. El proceso

(b, r, s)	$v(B)$	Forma típica
$(2, 1, 0)$	$v(B)x_t = \frac{\omega_0}{(1 - \delta_1)B} x_{t-2}$	
$(2, 1, 1)$	$v(B)x_t = \frac{(\omega_0 - \omega_1 B)}{(1 - \delta_1)B} x_{t-2}$	
$(2, 1, 2)$	$v(B)x_t = \frac{(\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2)}{(1 - \delta_1)B} x_{t-2}$	

Cuadro 2: Formas funcionales de la FIR para $r = 1$

de identificación de los parámetros (b, r, s) a partir de la función de correlación cruzada funciona de forma muy similar a la identificación de los parámetros p, q en un proceso ARI-MA (p, q) haciendo uso del comportamiento de las funciones de autocorrelación simple y autocorrelación parcial.

3. Los datos.

Para efectos de ilustrar la utilidad de los MFT sobre fenómenos económicos, se propone trabajar con las series de tiempo asociadas al precio de activos financieros agrícolas o denominados *commodities*. La guerra entre Rusia y Ucrania en febrero de 2022 despertó la discusión entre académicos, empresarios, consumidores y tomadores de decisión sobre los efectos concretos de la contracción en la producción de cereales como trigo, sorgo y soja sobre la oferta de ganado para consumo final. Bajo este escenario, se busca confirmar o desvirtuar mediante evidencia fáctica, la hipótesis que los cambios en los precios de insumos en la producción de insumos agrícolas para la producción de ganado pueden afectar precio de productos pecuarios.

Adicionalmente, como se contemplan variables que reflejan contratos futuros ($t = h + k$) (h es el tiempo actual y k es el periodo adicional en el tiempo en que se proyectan las expectativas de precio de contratos agropecuarios futuros), las relaciones esperadas de casualidad podrían reflejar un proceso contrario al de los procesos de Oferta y Demanda en $t = h$. Por ejemplo: Los operadores bursátiles tomarían decisiones sobre la adquisición de contratos futuros de la soja (como insumos de producción de ganado) dependiendo de cómo evolucionen los precios de los contratos futuros de ganado.

La fuente de información corresponde al valor pactado en los contratos futuros sobre estos activos financieros publicados en portales transaccionales. En particular, el cuerpo de datos utilizado para responder a la pregunta de investigación se delimita sobre los siguientes conceptos:

- Variable No. 1: G_t : precio por contrato derivado de 40.000 lbs de carne bovina en canal, medido en USD. Fuente: [inv22].
- Variable No. 2: S_t : Índice bursátil del promedio de contrato de soja de 5.000 Bushels (8 galones de grano) me-



Figura 1: Gráfico de las Series de Tiempo S_t (Precio de la Soya) y G_t (Precio del Ganado.)

didado en USD. Fuente: [Edi22].

- Periodo de Entrenamiento: 01/01/2016 - 31/12/2019.
- Frecuencia: Semanal (Agregación por promedio semanal dado que el reporte de la plataforma es el precio de cierre diario).
- Periodo de Validación: 01/01/2020 - 19/04/2020.
- Periodo de Comprobación: 01/01/2022 - 31/12/2022.
- Tamaño de Muestra: Entrenamiento: 209; Validación: 52.

Mediante análisis gráfico de las series disponibles en la Figura 1 se observa que existe un patrón muy marcado de crecimiento sostenido entre las series de tiempo S_t (Precio de la Soya) y G_t (Precio del Ganado). Si bien el coeficiente de correlación lineal contemporánea ($k = 0$) entre ambas series $\rho(G_t, S_t, 0)$ es bajo (0.00021), se observa que la correlación contemporánea por cada año evidencia una asociación lineal moderada de (-0.4062; -0.4784; 0.7878, 0.4880) para los años 2016 a 2019, respectivamente.

Lo anterior invita a profundizar si el rezago intertemporal permite identificar una asociación más fuerte entre ambas series e identificar: 1) si existe alguna relación causal entre los comportamientos del precio de su insumo principal respecto al precio final del producto de carne bovina; 2) cual es la magnitud de ese impacto y 3) cual es el tiempo que toma observar por primera vez dicho impacto y su duración.

4. Metodología de estimación del MFT.

Los pasos para construir la MFT más adecuada para responder al objeto de esta investigación son:

4.1. Hacer el preblanqueamiento de las Series G_t y S_t .

Como se observó en la Figura 1, ambas series de tiempo no satisfacen las condiciones de estacionariedad de una serie de

```
> adf.test(insumo_series_ganado$ganado)
Augmented Dickey-Fuller Test
data: insumo_series_ganado$ganado
Dickey-Fuller = -2.5184, Lag order = 5, p-value = 0.3587
alternative hypothesis: stationary

> adf.test(d1_log_ganado)
Augmented Dickey-Fuller Test
data: d1_log_ganado
Dickey-Fuller = -6.1525, Lag order = 5, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary

> adf.test(insumo_series_ganado$soybean)
Augmented Dickey-Fuller Test
data: insumo_series_ganado$soybean
Dickey-Fuller = -3.9328, Lag order = 5, p-value = 0.01353
alternative hypothesis: stationary

> adf.test(d1_log_soybean)
Augmented Dickey-Fuller Test
data: d1_log_soybean
Dickey-Fuller = -5.7379, Lag order = 5, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary
```

Figura 2: Resultados Prueba de Estacionariedad Dickey-Füller

tiempo (media y varianza constante), conforme es requerido para poder construir el MFT. Siguiendo las recomendaciones de [ECoS22], se hace una reducción de la escala de las series G_t, S_t de la siguiente forma:

- $d_1 \log S_t = \nabla(\log(S_t))$: corresponde a la primera diferencia del logaritmo natural de la serie S_t
- $d_1 \log G_t = \nabla(\log(G_t))$: corresponde a la primera diferencia del logaritmo natural de la serie G_t

Los efectos de la anterior transformación rinden frutos, dado que la prueba de estacionariedad de Dickey-Fuller brinda resultados satisfactorios. Como se demuestra en la figura 2, las series sin aplicar transformaciones ('ganado,soybean') de media y varianza observan estadísticos de prueba de estacionariedad Dickey-Füller que caen en zona de No-Rezago (por ejemplo: p-valor de 0.35 para G_t). Luego de aplicar las transformaciones, ('d1_log_ganado,d1_log_soybean') ambos p-valores de G_t, S_t son inferiores a 0.05, es decir, se obtienen series preblanqueadas listas para ser incorporadas en el proceso de estimación de de la FCC.

4.2. Construir la FCC y FIR entre G_t y S_t .

Al estimar la FCC, se observa en la Figura 3 sobre las series transformadas, se identifican tres coeficientes de la FCC cuyo valor estimado es significativamente superior al error estándar de la serie de correlaciones cruzadas. Para la muestra de entrenamiento, el error estándar, se estima de la forma $\frac{z_{0,975}}{\sqrt{T}} = \frac{1,96}{14,456} = 0,13357$, donde $z_{0,975} = -z_{0,025}$ es el valor de

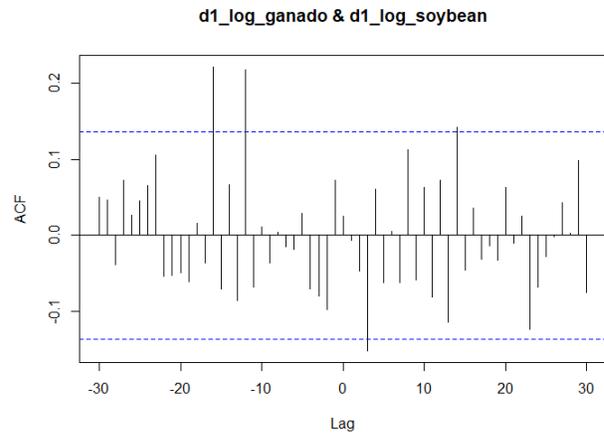


Figura 3: Función de Correlación Cruzada entre S_t sobre variable explicada G_t

la distribución normal estándar con un nivel de significancia de 0.05.

Como hecho importante, se evidencia que existen dos coeficientes de correlación cruzada significativamente superior al error estándar en los rezagos $K = -12, -16$ cuyos respectivos valores son $(0,2170, 0,2212)$. Esto se interpreta como los cambios ocurridos en G_t reflejan cambios 12 y 16 semanas después en S_t . Este resultado es estadísticamente significativo y permite evidenciar que existe un patrón de correlación lineal positiva que no se evidencia al estimar las correlaciones contemporáneas ($k = 0$), con lo cual un MFT es una propuesta adecuada para entender este fenómeno. El proceso a nivel descriptivo no evidencia un proceso secuencial estricto entre la serie transformada S_t sobre G_t en la medida que se observa un coeficiente ligeramente significativo en los rezagos $k = \{4, 5\}$. Para efectos de estimar la relación causal entre ambas variables, consideraremos solamente los rezagos negativos en la estimación de $\nu(B)$.

Al analizar la gráfica de la FCC, se puede proponer el siguiente modelo de función de transferencia:

- variable de entrada: G_t
- variable de salida: S_t
- orden de rezago $b = 12$
- orden de duración del impacto $s = 4$. Dado que el impacto alcanza el rezago $k = -16$
- orden de duración ARIMA $r = 1$. Estimado a partir de la Función de Autocorrelación Simple (FAS) y la Función de Autocorrelación Parcial (FACP) S_t

Por lo anterior, la forma funcional del modelo propuesto es:

$$S_t = \nu(B)G_t + \eta_t \tag{4}$$

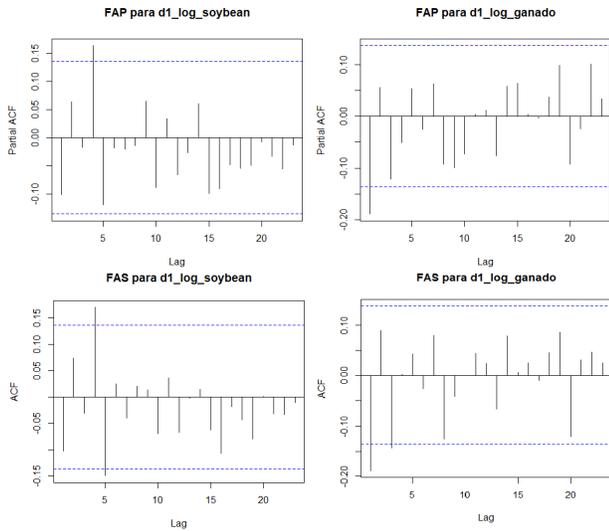


Figura 4: Función de Correlación Cruzada entre S_t y G_t

4.3. Estimar el modelo de función de Transferencia.

A continuación se enlistan los principales pasos requeridos para abordar este tipo de modelamiento, conforme lo han propuesto previamente [Wei06] y [Ahm15], con base en la metodología Box-Jenkins ¹

Para poder obtener un modelo de función de transferencia, se requiere descomponer este proceso en varios pasos: En primera instancia, debe construirse un modelo ARIMA para la serie regresora G_t , cuyo pronóstico servirá como variable de entrada en la muestra de entrenamiento de la serie S_t . Posteriormente, se estimará un modelo ARIMA sobre la serie objetivo S_t , incluyendo el comportamiento modelado para la serie G_t . Es importante aclarar que la especificación funcional de la interacción entre ambas variables se establece en el filtro construido con la FIR y la FCC obtenidos en la sección 4.2.

4.3.1. Estimación modelo ARIMA para la variable de entrada G_t .

Mediante la estimación de la Función de Autocorrelación Simple (FAS) y la Función de Autocorrelación Parcial (FAP), se identifica que S_t sigue un proceso ARIMA(1,0,0), lo cual puede ser observado en la Figura 4.

Así, la estimación del modelo que se ajusta a las especificaciones permite obtener un modelo ARIMA(1,0,0) para la serie preblanqueada G_t , cuyo p-valor es menor a 0.05. Es decir, se rechaza la hipótesis nula que su estimador sea estadísticamente igual a cero. Lo anterior se puede detallar en la Figura 5 generada por R al correr el modelo en mención. Adicionalmente, al verificar las condiciones de ruido blanco para los residuos del modelo, se evidencia que los residuos no son autocorrelacionados, su varianza es constante a lo largo

¹La metodología Box-Jenkins es uno de los enfoques clásicos para análisis de Series de Tiempo. Para mayor detalle, puede consultarse [Wei06] Capítulo 2-10.

```
Call:
arima(x = datos_rezago$d1_log_ganado, order = c(1, 0, 0))

Coefficients:
      ar1      intercept
      -0.1892    -0.0005
s.e.      0.0682      0.0015

sigma^2 estimated as 0.0006862: log likelihood = 462.42, aic = -920.8:
>
>      coefest(fit_ganado_model_1_0)

z test of coefficients:

      Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
ar1      -0.18916674  0.06821260 -2.7732 0.005551 **
intercept -0.00047518  0.00153015 -0.3105 0.756149
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Figura 5: Salida R - Modelo ARIMA (1,0,0) para $(\nabla \log G_t)$

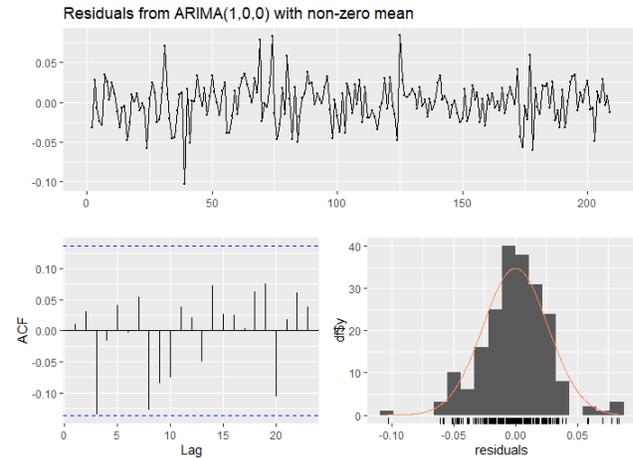


Figura 6: Análisis de Residuos para modelo ARIMA sobre $(\nabla \log G_t)$.

del tiempo y tiene media estadísticamente igual a cero (Ver Figura 6).

En este proceso, solo se evidencia un rezago estadísticamente significativo cuando $k = 5$, con lo cual se propone un modelo ARIMA(5,0,0) para la serie blanqueada de acuerdo a la FAS y la FAP estimada para S_t . No obstante, la estimación del modelo final ilustrado en la figura 7 evidencia que los efectos autorregresivos de S_t no son adecuados para construir el modelo con los parámetros ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 y ϕ_4 y por tanto son excluidos al no obtener coeficientes estadísticamente diferentes de cero. Es decir, se estimaría un proceso ARIMA con coeficientes $\{\phi_5, \phi_1\}$ diferentes de cero como únicos coeficientes.

4.3.2. Estimación modelo ARIMA para la variable de salida S_t .

Con los elementos analizados en la sección anterior, el modelo de función de transferencia propuesto es:

$$S_t = -0,00043 - 0,1842S_{t-5} - 0,1808S_{t-16} + 0,2142G_{t-12} + 0,2179 + G_{t-16}\eta_t \quad (5)$$

donde la función de transferencia $v(B)$ tiene la especificación $(b, r, s) = (12, 1, 4)$, con $\phi_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots, 11, 13, 14, 15$.

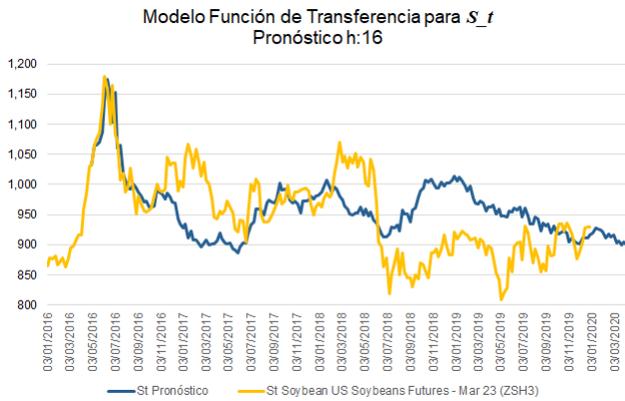


Figura 7: Modelo de Función de transferencia para S_t en función de S_t ($\nabla \log S_t = v(B)\nabla \log G_t + \eta_t$)

4.4. Evaluar resultados del modelo.

El mejor modelo obtenido se presenta a en la Figura 7 de donde se puede concluir que en términos generales, el modelo se ajusta adecuadamente a la serie original hasta antes de ocurrir el drástico descenso del valor del precio de la Soya entre junio y julio de 2018. Luego de ese periodo, se evidencia un drástico cambio de nivel que no es recuperado por el modelo a pesar de que la mímica de la serie pronosticada sobre la serie original se mantiene hasta mayo 2019.

En términos de consistencia estadística, los efectos autocorrelacionados de S_t sobre si misma son estadísticamente significativos, cuya magnitud y signo son consistentes con los evidenciados en las FAS y FACP, tanto para el rezago autoregresivo de S_t en $k = 5$ como para los rezagos en la variable regresora G_{t-12} y G_{t-16} . Esta afirmación se basa en la medida en que la probabilidad de significancia estadística de cada estimador es menor al 0.016 (ver Figura 8).

En cuanto el comportamiento de la serie asociada a los errores del modelo η_t , se evidencia por análisis gráfico que dicho vector de errores satisface la condición de estacionariedad en términos de media y varianza. A su vez, la prueba Ljung-Box asociada a no-autocorrelación en los errores brindó resultados satisfactorios. Esta prueba valida la hipótesis nula que los errores no evidencian procesos autorregresivos de orden k ([fSTN]). La ecuación para estimar el estadístico de prueba es:

$$Q = T(T + 2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{n - k} \quad (6)$$

donde T es el tamaño de muestra de la serie de tiempo, $\hat{\rho}_k$ es la correlación de los errores y m el número de rezagos a ser probados. Este estadístico de prueba se compara contra un valor crítico asociado a una distribución de probabilidad Chi-cuadrado con h grados de libertad, el cual se obtiene de operar aritméticamente los parámetros del modelo ARIMA de la forma $h = m - p - q$, donde p y q son los parámetros del

```
> coeftest(modelo_arimax_model)
z test of coefficients:

```

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
ar5	-0.18417401	0.07004470	-2.6294	0.0085541 **
ar16	-0.18089144	0.07510627	-2.4085	0.0160194 *
intercept	-0.00043291	0.00124962	-0.3464	0.7290194
d1_l_n_lag_12_ganado	0.22176833	0.05991481	3.7014	0.0002144 ***
d1_l_n_lag_16_ganado	0.21468562	0.05992743	3.5824	0.0003404 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Figura 8: Valor-p para coeficientes MFT

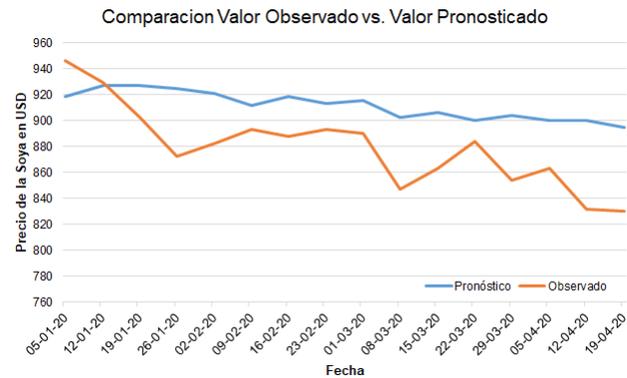


Figura 9: Predicción del modelo para h=16

modelo ARIMA estimado en el modelo 5; en el caso del es $m = 19 - 3 - 0$.

4.5. Verificar la consistencia del modelo en las muestras de validación y comprobación.

Al comparar la serie S_t real contra su pronóstico (\hat{S}_t) en la muestra de validación ($T = 16$), se evidencia que el pronóstico es consistente al identificar la tendencia decreciente de la serie original (Ver Figura 9). No obstante, se observa que el nivel o valor en el pronóstico es más alto en comparación con el valor real observado, evidenciando un desfase en términos de nivel de la serie.

Para el periodo de comprobación contemplado, se ajusta un MFT bajo la especificación funcional definida en 5, donde los resultados no son satisfactorios, en la medida que los estimadores no alcanzan a superar el nivel de significancia necesaria para ser estadísticamente distintos de cero.

Una posible causa que explica la pérdida de consistencia de los estimadores puede ser construir el modelo incorporando el efecto del cambio abrupto de nivel entre junio y julio 2018.

5. Conclusiones.

Con la aplicación hecha de un MFT sobre el fenómeno económico abordado en este artículo, podemos hacernos una idea que este tipo de modelos es una herramienta muy adecuada para modelar efectos causales. Como los principales bene-

ficios obtenidos de este ejercicio, se obtiene que los coeficientes del modelo evidencian consistencia con la interpretación económica, y a su vez, dichas estimaciones de la magnitud, sentido son estadísticamente significativas. Igualmente, la extrapolación del modelo a muestras de validación y comprobación captura la tendencia de manera aceptable, lo cual brinda un valor agregado al momento de generar análisis proyectivos sobre el comportamiento de las variables y los fenómenos.

No obstante, se observan ciertas desventajas en el empleo de esta técnica: por un lado, los estimadores son sensibles a perder significancia estadística al reestimar el modelo en la muestra de comprobación. Adicionalmente, el modelo no captura de forma endógena cambios abruptos de nivel, con lo cual requiere ajustes tales como la modelación de intervenciones sobre la serie de tiempo, aumentando el número de parámetros del modelo.

En conclusión, los MFT son un esquema de modelamiento estadístico que cuenta con más elementos a favor para ser utilizado, los cuales tienen más relevancia que los riesgos o sensibilidad de inconsistencia de la estimación por cambios abruptos en las series analizadas.

Referencias.

- [Abr85] Bovas Abraham, *Seasonal time series and transfer function modeling*, Journal of Business and Economic Statistics **3** (1985), no. 4, 156.
- [Ahm15] M. I. Ahmad, *Ctransfer function models for forecasting domestic water use*, Journal of Social and Development Sciences **6** (2015), no. 2, 52–56. <https://pdfs.semanticscholar.org/996d/714395397dc0e9bd32c188b83c2ea7fbc01a.pdf>.
- [Di14] José Manuel Guevara Díaz, *Uso correcto de la correlación cruzada en climatología: el caso de la presión atmosférica entre taití y darwin*, 2014. ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1012-70892014000100005.
- [EC08] Jorge Martínez Elkin Castaño, *Uso de la función de correlación cruzada en la identificación de modelos arma*, Revista Colombiana de Estadística (2008), 293 a 310. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/40707>.
- [ECoS22] Penn State University Eberly College of Science, *9.1 prewhitening as an aid to interpreting the cc*, 2022. URL: <https://online.stat.psu.edu/stat510/lesson/9/9.1>.
- [Edi22] Bloomberg US Edition, *Bcomsy:ind bloomberg soybeans subindex*, 2022. <https://www.bloomberg.com/quote/BCOMSY:IND>.
- [fSTN] National Institute for Standards and Departamento del Comercio de los Estados Unidos de América Technology NIST, *Box-ljung test*. URL: <https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section4/pmc4481.htm>.
- [inv22] investing.com, *Commodities historical data*, 2022. [us-soybean-meal-historical-data,feed-cattle](https://www.investing.com/commodities/historical-data/feed-cattle).
- [LeB18] Blake LeBaron, *Armax models - econ/fin250a: Forecasting in finance and economics*, Brandeis University, Massachusetts, 2018. www.people.brandeis.edu/~blebaron/classes/fin250a/regression/armax.html.
- [oS22] Australian Bureau of Statistics, *Time series analysis: The basics*, 2022. <https://www.abs.gov.au/websitedbs/d3310114.nsf/home/time+series+analysis:+the+basics>.
- [Sof99] Statistical Analysis Software, *Notation for arima models*, 1999. <https://www.sfu.ca/sasdoc/sashtml/ets/chap30/sect13.htm>.
- [Wei06] William W.S. Wei, *Time series analysis. univariate and multivariate methods*, Pearson Education, 2006.

Acerca del autor: César Augusto es estudiante de noveno semestre de Matemáticas. Igualmente, cuenta con un pregrado en Economía y una Especialización en Estadística. En la actualidad se dedica a la consultoría de métodos cuantitativos para el sector de inteligencia estratégica. En su tiempo libre, aprende alemán de forma autodidacta y es un promotor incansable del buen uso del español. A criterio de sus hijos, es un cariñoso y divertido viejo chocho decrépito.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y ALGEBRAICA DE LAS ECUACIONES LINEALES Y SUS PROPIEDADES EN EL *Sistema Seno*

Walter Garzón Gutiérrez*
walter.garzon01@usa.edu.co

1. Resumen.

Este artículo muestra los resultados de un estudio¹ enfocado en el cambio de representaciones de algunos objetos geométricos, vistos como la solución a una ecuación lineal como un conjunto de puntos que cumplen una condición meramente geométrica. Esto se logra a partir de una manera diferente de ubicar los puntos sobre un plano en unos ejes coordenados diferentes al cartesiano, en los cuales se representan gráficamente las rectas (objetos geométricos). Se estudian las diferentes definiciones y propiedades que cumplen estos objetos en el sistema coordenado cartesiano y se muestra si se cumplen o no en el nuevo sistema de ubicación de puntos.

2. Introducción.

En diferentes cursos de cálculo y geometría se suele representar el conjunto de puntos solución a ecuaciones de primer y segundo grado en el plano cartesiano dando una idea de su representación; por ejemplo, si es una de primer grado, su gráfica es una línea recta y si es una de segundo grado, es una cónica. En algunos de estos cursos se profundiza un poco en otros sistemas coordenados como el polar², oblicuo³ o PAR⁴. En la Figura 1 se muestra que la representación varía dependiendo el sistema que se esté usando para construir la gráfica. Estudiar las propiedades de los objetos geométricos en dichos sistemas de representación puede llevar a grandes hallazgos muy útiles para solucionar diferentes problemas que en el sistema cartesiano a veces se tornan complicados, por ejemplo, el cambio de coordenadas al sistema polar puede ayudar a determinar soluciones a ecuaciones diferenciales o integrales

*Estudiante de la maestría en matemáticas aplicadas de la Universidad Sergio Arboleda.

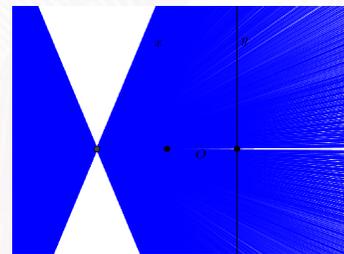
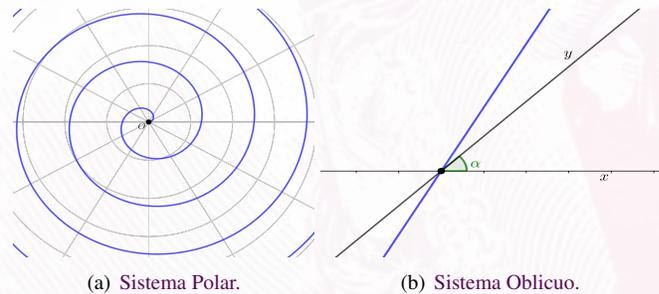
¹Tomado de [Gar19]

²Para ubicar un punto en el sistema polar se toma una longitud r y un ángulo θ , se ubica un vector de tal manera que tenga longitud r y forme el ángulo θ con la horizontal y la cabeza del vector será la imagen del punto [Leh89].

³El sistema oblicuo está compuesto por dos rectas que forman un ángulo $\alpha \neq 90$. Para ubicar un punto se toman dos puntos, cada uno sobre un eje, y se traza una recta perpendicular por cada punto al eje en el cual se encuentre el punto, luego el punto de intersección entre las dos rectas será la imagen del punto [MC11].

⁴El sistema PAR está compuesto por dos rectas paralelas las cuales representan los ejes x y y . Para ubicar un punto se ubican dos puntos, cada uno en diferente eje, y se traza una recta que contenga a los dos puntos. Esta recta será la imagen del punto [OP12].

de manera más sencilla, como también tiene diferentes aplicaciones en biología, astronomía, entre otras; el sistema PAR podría tener diferentes aplicaciones en ecuaciones diferenciales, pues una ecuación lineal se representa con un punto y esto facilitaría diferentes cálculos o transformaciones.



(c) Sistema PAR.

Figura 1: Representación de $2x - y = 0$ en diferentes sistemas coordenados.

Con base en lo anterior, el interés de este artículo es estudiar las representaciones algebraicas y geométricas en un sistema coordenado diferente al cartesiano (rectangular) que se denomina *Sistema Seno* siguiendo un desarrollo paralelo al planteado en [Leh89], el cual será presentado más adelante de manera formal. Pensando en la comodidad y curiosidad del lector, se han publicado applets desarrollados en GeoGebra, en los cuales se puede explorar y corroborar diferentes resultados. Los links estarán al final de cada sección o subsección.

3. Sistema Seno.

Este sistema está conformado por el eje y del sistema cartesiano y la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}(x)$ como apoyo para



ubicar los puntos. Para ubicar un punto (x_0, y_0) sobre el *Sistema Seno*, se toma el punto $(x_0, 0)$ en el sistema usual, se traza una perpendicular por este punto al eje x y la intersección entre la perpendicular y la curva de la función $f(x) = \text{sen}(x)$ es el punto A , luego, se ubica el punto B con coordenadas $(0, y_0)$ en el sistema usual. Por último, se ubica el punto medio C entre los puntos A y B y este es la representación de (x_0, y_0) en el *Sistema Seno*. (véase Figura 23).

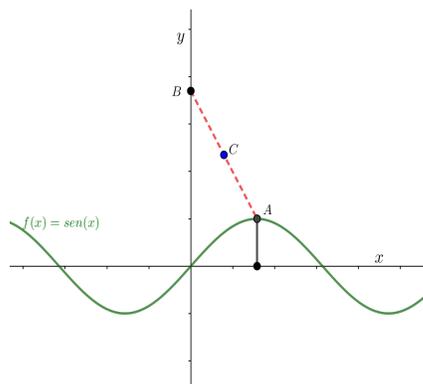


Figura 2: *Sistema Seno*.

Para diferenciar los ejes coordenados del sistema cartesiano y los ejes del *Sistema Seno* se pondrá una línea sobre el nombre del eje, es decir, los ejes \bar{x} y \bar{y} serán los ejes coordenados en el *Sistema Seno* y para los puntos se usará la notación $(x_0, y_0)_S$.

Antes de entrar a estudiar los diferentes objetos geométricos en este sistema, se demostrará que el *Sistema Seno* efectivamente es un sistema coordenado. Para ello se enuncia la siguiente definición:

- Un conjunto de parejas ordenadas \mathbf{A} es un sistema coordenado en un plano α si y sólo si existe una función f biyectiva de \mathbf{A} en α .

Una función es biyectiva si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva, es decir, cumple que:

- Para todo x, y, z, w en \mathbb{R} , si $f(x, y) = f(z, w)$ entonces $(x, y) = (z, w)$.
- Sea un punto P en α entonces existen x, y en \mathbb{R} tal que $P = f(x, y)$.

Por último, se definirá la función f como:

$$f: \mathbf{A} \rightarrow \alpha, \\ (x, y) \rightarrow P.$$

Sea el punto S con coordenadas $(x_0, y_0)_S$, se puede afirmar que S es único, ya que por la manera de ubicar los puntos en el *Sistema Seno*, para todo x y y en \mathbb{R} existen puntos únicos Q y R de referencia sobre la curva de la función seno y sobre la recta vertical respectivamente, y por definición de punto medio, S es único.

Demostración que f es inyectiva: Sean x, y, z, w en \mathbb{R} , (x, y) y (z, w) en \mathbf{A} y $f(x, y) = f(z, w)$. Como f es una función bien definida se puede decir que $f(x, y) = P$ y $f(z, w) = Q$ con P y Q puntos en α , luego, existen A y B puntos de referencia tal que A está sobre la curva de la función seno y B sobre la recta vertical y P es punto medio entre A y B , por transitividad se tiene que Q también es punto medio de A y B , por tanto, las coordenadas de Q son (x, y) . Por la unicidad de A y B se tiene que $x = z$ y $y = w$, es decir que $(x, y) = (z, w)$ y $Q = P$, luego, es único y en conclusión, f es inyectiva.

Demostración que f es sobreyectiva: Sea un punto P en α . Como el *Sistema Seno* está sobre el sistema cartesiano, el punto P tendrá coordenadas (m, n) en el sistema cartesiano, luego, en el *Sistema Seno* el punto P tiene coordenadas $(2m, 2n - \text{sen}(2m))$; como cada punto sobre el plano tiene una coordenada en el plano cartesiano, entonces, tiene una coordenada en el *Sistema Seno*, por ende, a cada punto P se le puede asignar una coordenada (x, y) en el *Sistema Seno* o lo que es equivalente $P = f(x, y)$, en conclusión, f es sobreyectiva.

Queda demostrado que f es una función biyectiva de \mathbf{A} en α y por definición el *Sistema Seno* es un sistema coordenado.

3.1. Ejes y Semiejes.

En esta sección se definen los ejes en el *Sistema Seno*, para ello, se tienen en cuenta las siguientes definiciones:

- El eje x es el conjunto de puntos tales que su coordenada es de la forma $(x, 0)$.
- El eje y es el conjunto de puntos tales que su coordenada es de la forma $(0, y)$.

El sistema cartesiano tiene la particularidad que la recta vertical que se utiliza para ubicar los puntos coincide con el eje y y la recta horizontal coincide con el eje x , pero, en este sistema la recta vertical coincide con el eje y , aun así, no ocurre lo mismo con el eje x , más adelante se mostrará el porqué de esto. Por ahora, se define la recta vertical como **Semieje \bar{y}** (que también es el eje \bar{y}) y la curva Seno como **Semieje \bar{x}** . En las Figuras 3 y 4 se muestran los ejes y los semiejes.

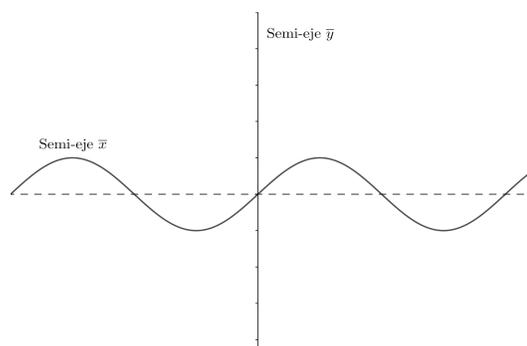


Figura 3: *Semiejes del Sistema Seno*.

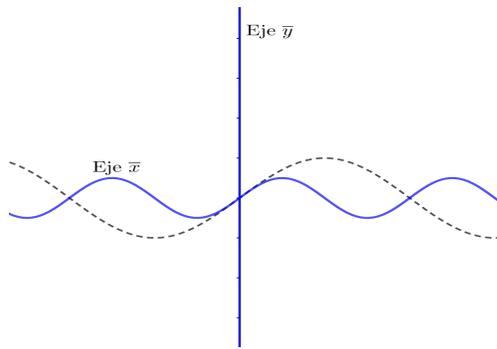


Figura 4: Ejes del Sistema Seno.

3.2. Cambio de coordenadas entre el Sistema Seno y el sistema cartesiano.

Para caracterizar el cambio de coordenadas del Sistema Seno al sistema cartesiano se dice que:

- * Dado un punto $(x,y)_S$ en el Sistema Seno sus coordenadas en el sistema cartesiano serán $\left(\frac{x}{2}, \frac{y + \text{sen}(x)}{2}\right)_C$.
- * Dado un punto $(x,y)_C$ en el sistema cartesiano sus coordenadas en el Sistema Seno serán $(2x, 2y - \text{sen}(2x))_S$.

Ejemplo 3.1. Se ubicará el punto C con coordenadas $(1,2)_S$: Usando el primer cambio de coordenadas se reemplaza y C tendrá coordenadas $\left(\frac{1}{2}, \frac{2 + \text{sen}(1)}{2}\right)_C$. En la Figura 5 se observa el punto C con las coordenadas en el sistema cartesiano; para el eje x el color azul claro y para el eje y color morado. Y en el Sistema Seno; para el semieje \bar{x} el color azul y para el semieje \bar{y} el color verde.

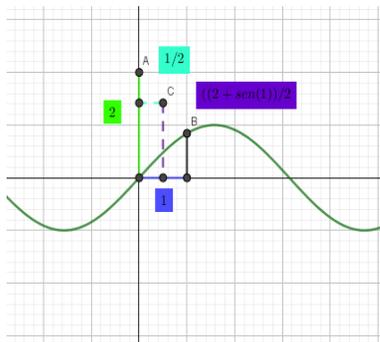


Figura 5: $(1,2)_S \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{2 + \text{sen}(1)}{2}\right)_C$.

Nota: Tenga en cuenta que la manera de ubicar los puntos en el semieje \bar{x} no verifica que la distancia de $(0,0)_S$ a $(a,0)_S$ sea a en el Sistema Seno.

4. Soluciones a ecuaciones lineales en el Sistema Seno.

En esta sección se hace un desarrollo paralelo al que hace Lehmann en [Leh89] en los capítulos 1, 2 y 3 en los cuales estudia todo lo relacionado a las rectas desde su representación gráfica y algebraica, además, de mostrar definiciones y propiedades como cortes entre rectas, pendiente, ángulos y teoremas que cumplen allí.

4.1. Gráfica de la ecuación $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$ y cortes con los ejes.

En lo que sigue se presentan las representaciones gráficas en el Sistema Seno de los conjuntos solución a las ecuaciones de la forma $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$ cuando varían las constantes a, b y c . Se realiza a partir de casos en los cuales se le asignan valores a las constantes a, b, c y se construyen algunas gráficas de los conjuntos solución los cuales tienen el nombre de **s-rectas**. Paralelamente se estudian los cortes con los ejes \bar{x} y \bar{y} y se concluye una fórmula con la cual se puede encontrar el corte de cualquier s-recta con los ejes usando los coeficientes a, b y c .

Ejemplo 4.1. Si $a, b, c = 0$: En este caso se tiene la ecuación $0\bar{x} + 0\bar{y} + 0 = 0$ y los puntos que la satisfacen son todos los posibles puntos $(x,y)_S$ con $x, y \in \mathbb{R}$, es decir, todos los puntos del plano.

Ejemplo 4.2. Si $a, b = 0$ y $c \neq 0$: Dándole a c valores diferentes de 0 se concluye que para cualquiera de estos, en la ecuación se encuentra una incoherencia ya que queda de la forma $c = 0$ y se contradice con la hipótesis.

Ejemplo 4.3. Si $b = 0$ y $a, c \neq 0$: En este caso se tiene que la s-recta obtenida por la ecuación $a\bar{x} + c = 0$ no tiene cortes con el eje \bar{y} o coincide en todos sus puntos con el eje \bar{y} , el corte con el eje \bar{x} se da en el punto $(-\frac{c}{a}, 0)_S$ o en el sistema rectangular $(-\frac{c}{2a}, 0)_C$. En la Figura 6 se ilustra la solución de esta ecuación.

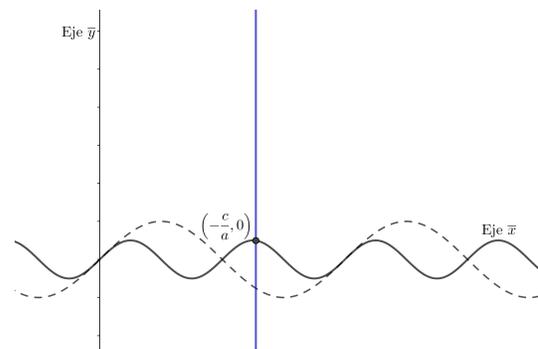


Figura 6: Representación al conjunto solución de $a\bar{x} + c = 0$.

1° Caso: Si $a = 0, b \neq 0$ y $c \in \mathbb{R}$.
El conjunto solución de la ecuación $\bar{y} = 0$ (eje \bar{x}), tomando a

$c = 0$, se puede representar en el *Sistema Seno* como el conjunto de puntos que caen en la curva morada. Si $c = -2$ el conjunto de puntos solución a la ecuación $\bar{y} - 2 = 0$ se representan en la curva roja, y si $c = 3$ entonces la representación gráfica de $\bar{y} + 3 = 0$ en el *Sistema Seno* se ve en la curva naranja. Estas gráficas se presentan en Figura 7.

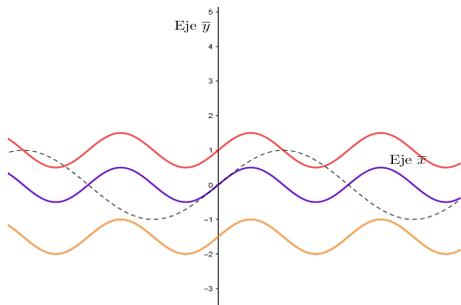


Figura 7: Ejemplo de *s-rectas* 1° Caso.

Si se observa detenidamente los cortes con el eje \bar{y} de las gráficas que se presentan en 7, se tiene que el corte de la *s-recta* $\bar{y} = 0$ es en el punto $(0, 0)_S$, el de la *s-recta* $\bar{y} - 2 = 0$ es en $(0, 2)_S$ y el de la *s-recta* $\bar{y} + 3 = 0$ es en $(0, 3)_S$. Haciendo el respectivo cambio de coordenadas se dice que $\bar{y} = 0$ en el sistema cartesiano tiene corte en el punto $\left(\frac{0}{2}, \frac{0 + \text{sen}(0)}{2}\right)_C$, resolviendo, $(0, 0)_C$; realizando el mismo procedimiento con los demás puntos, las *s-rectas* $\bar{y} - 2 = 0$ y $\bar{y} + 3 = 0$ tienen corte en $(0, 1)_C$ y en $(0, -1.5)_C$ respectivamente. En general, se puede decir que si se tiene una ecuación de la forma $b\bar{y} + c = 0$ su corte con el eje \bar{y} es en $\left(0, -\frac{c}{b}\right)_S$ y ninguna se corta con el eje \bar{x} , exceptuando las que son de la forma $by = 0$ que coincide en todos sus puntos. También, se puede ver que las *s-rectas* se mueven horizontalmente $-\frac{c}{b}$ unidades. Si $-\frac{c}{b} > 0$ entonces la gráfica se traslada hacia arriba según el eje \bar{y} , si $-\frac{c}{b} < 0$ se traslada hacia abajo.

2° Caso: Si $a \neq 0, b \neq 0$ y $c = 0$.

Si se toma a $a = -1$ y $b = 1$ se tiene la ecuación $-\bar{x} + \bar{y} = 0$ y el corte con \bar{y} y el eje \bar{x} de la *s-recta* es en $(0, 0)_S$. (ver Figura 8)

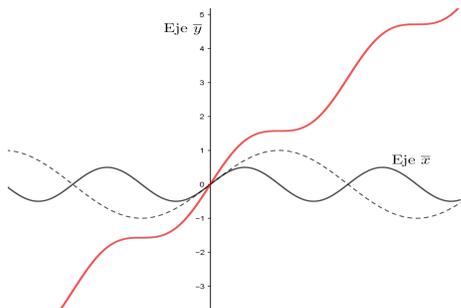


Figura 8: Gráfica de $-\bar{x} + \bar{y} = 0$.

De manera general, se puede decir que si se tiene una

ecuación de la forma $a\bar{x} + b\bar{y} = 0$ su corte con el eje \bar{y} y con el eje \bar{x} es en el punto $(0, 0)_S$.

3° Caso: Si $a \neq 0, b \neq 0$ y $c \neq 0$.

Se inicia con los valores $a = 1, b = 2$ y $c = 4$, es decir, la ecuación $\bar{x} + 2\bar{y} + 4 = 0$. Su corte con el eje \bar{y} es en el punto $(0, -2)_S$ y con el eje \bar{x} es en $(-4, 0)_S$. En el sistema cartesiano son los puntos $(0, -1)_C$ y $(-2, 0.38)_C$. La representación gráfica del conjunto solución se muestra en la Figura 9.

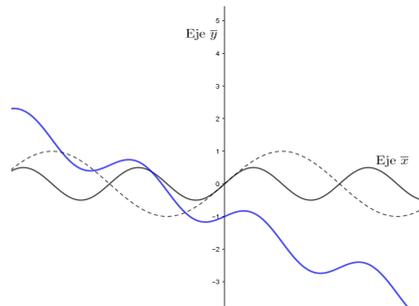


Figura 9: Gráfica de $\bar{x} + 2\bar{y} + 4 = 0$.

Si se tiene una ecuación $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$ en el *Sistema Seno* con $a, b, c \in \mathbb{R}$ el corte con el eje \bar{y} es en el punto $\left(0, -\frac{c}{b}\right)_S$ y con el eje \bar{x} es en $\left(0, -\frac{c}{a}\right)_S$.

De esta sección se concluye que al tener la ecuación $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$, la intersección de la gráfica con el eje \bar{y} se puede encontrar tomando a $\bar{x} = 0$ y despejando a \bar{y} , de manera análoga se encuentra la intersección con el eje \bar{x} . Se pudieron observar las transformaciones que tienen las *s-rectas* según los coeficientes de la ecuación lineal en el *Sistema Seno*. En esta sección solo se analizaron los cortes con los ejes \bar{x} y \bar{y} pero, si observa nuevamente, puede notar que los cortes con el semieje \bar{y} coinciden siempre con los del eje \bar{y} pero, en algunos casos hay más de un corte con el semieje \bar{x} , esto se analizará en la siguiente subsección y se explicará por qué se corta en varios puntos.

Applet ecuación lineal:

<https://www.geogebra.org/m/jggssewy>

4.2. Cortes con los semiejes.

Se dedica esta sección al estudio de los cortes con los semiejes, enfocándose particularmente en los cortes con el semieje \bar{x} ya que los cortes con el semieje \bar{y} son los mismos cortes con el eje \bar{y} . Como se observó en la sección 4.1 los cortes con el semieje \bar{x} pueden ser varios dependiendo de la *s-recta* que se tome. En este caso no se encontraron soluciones generales, pero, se encontraron aproximaciones a las soluciones utilizando métodos numéricos.

Para justificar este proceso teóricamente, lo primero que se tiene en cuenta es que en el *Sistema Seno* el semieje \bar{x}

no es una s -recta, es decir, su forma algebraica no se puede escribir como $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$, por tanto, primero se encuentra la representación algebraica del semieje \bar{x} .

Por definición, el semieje \bar{x} en el sistema rectangular es la función seno que algebraicamente se presenta como $f(x) = \text{sen}(x)$, luego, los puntos que pertenecen a esta función serán de la forma $(x, \text{sen}(x))_C$. Usando el cambio de coordenadas que se presentó en la sección 3.2, estos puntos en el *Sistema Seno* son de la forma:

$$(x, \text{sen}(x))_C \implies (2x, 2\text{sen}(x) - \text{sen}(2x))_S,$$

luego, en el *Sistema Seno* el eje \bar{x} tiene como ecuación

$$\bar{y} - 2\text{sen}(\bar{x}/2) + \text{sen}(\bar{x}) = 0.$$

Ahora, como se quiere encontrar las intersecciones entre el semieje \bar{x} y una s -recta cualquiera se despeja \bar{y} de la ecuación lineal y de la ecuación del semieje \bar{x} , se igualan y se obtiene la siguiente ecuación:

$$a\bar{x} + 2b\text{sen}(\bar{x}/2) - b\text{sen}(\bar{x}) + c = 0.$$

Por último, se crea un conjunto en el cual estén las soluciones a la ecuación y estas serán las coordenadas de \bar{x} para los cuales el eje \bar{x} y la s -recta se encuentren.

Se comprobó que si $b = 0$, su intersección es única en $(-\frac{c}{a})_S$. A manera de exploración se puede mostrar que si $a \neq 0$ los puntos de intersección son finitos y, además, son un número impar de intersecciones. Si $a = 0$, existen infinitas intersecciones si aproximadamente $-2,63 < \frac{c}{b} < 2,63$; ahora si aproximadamente $\frac{c}{b} < -2,63$ o $\frac{c}{b} > 2,63$ no existe intersección entre la s -recta y el semieje \bar{x} .

4.3. Pendiente de una s -recta.

Se define la pendiente de una s -recta t cuya ecuación es $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$ como el cociente entre $-a$ y b y se denota con la letra m .

$$m = -\frac{a}{b}. \tag{1}$$

La pendiente tiene la propiedad de describir el movimiento de dos puntos que pertenezcan al conjunto solución de la ecuación de alguna s -recta, para ser más específicos, si la pendiente es $-\frac{a}{b}$ entonces los puntos de la s -recta se moverán b **s-unidades** hacia la derecha (en el semieje \bar{x}) y a **s-unidades** hacia arriba o hacia abajo en el semieje \bar{y} dependiendo del signo de $-\frac{a}{b}$; si es positivo “sube”, si es negativo “baja”.

Nota: Fíjese que aparece el término **s-unidad** el cual es la unidad en el *Sistema Seno*. Se diferencia de las unidades en el sistema rectangular, ya que esta no se refiere a la distancia entre los puntos, sino al cambio de coordenadas.

En la Figura 10 se observan varias s -rectas con diferentes pendientes y se evidencia que por un punto cualquiera en el

Sistema Seno pasan infinitas s -rectas, esto se debe a que para cada número en el conjunto de los números reales, se puede construir una s -recta con esta pendiente.

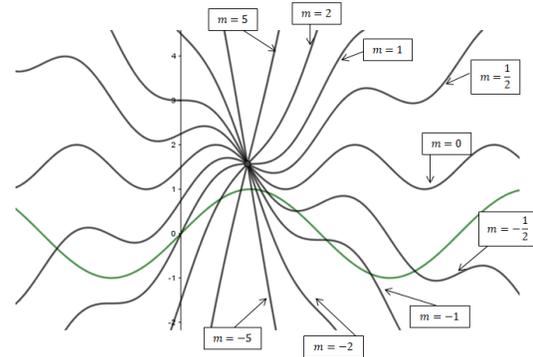


Figura 10: Haz de s -rectas en el *Sistema Seno*.

Con este término definido se estudian ciertos teoremas que se cumplen en el *Sistema Seno* como lo son el *Teorema Punto-Pendiente* y *Dos Puntos-Pendiente*.

4.4. Cortes entre s -rectas.

Se define el corte entre dos s -rectas l y t con ecuaciones

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0 \quad \text{y} \quad a'\bar{x} + b'\bar{y} + c' = 0$$

respectivamente, como los puntos $(x_0, y_0)_S$ que pertenecen a l y t simultáneamente. Se debe tener en cuenta que se está tomando la s -recta desde su definición algebraica y lo que cambia es su representación gráfica, por tanto, a partir de sus ecuaciones se puede construir un sistema lineal dos por dos que se desarrolla usando la determinante de esta matriz: si esta tiene una única solución entonces se intersecan en un único punto, si no tiene solución no se intersecan y si tiene infinitas soluciones estas dos s -rectas coinciden en todos sus puntos, esto se ilustra gráficamente en las Figuras 11, 12 y 13.

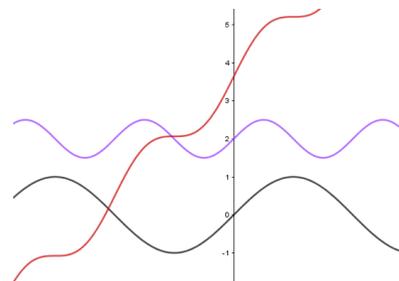


Figura 11: Única solución.

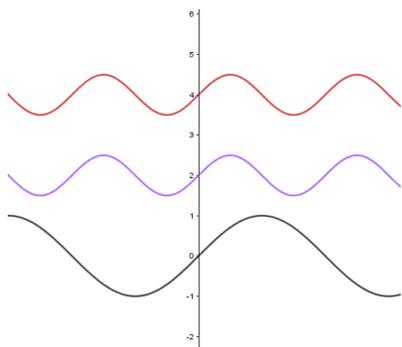


Figura 12: No hay solución.

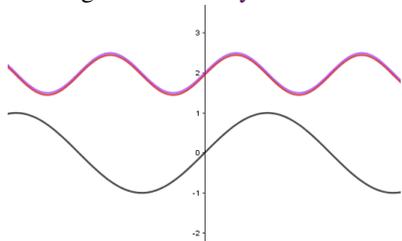


Figura 13: Infinitas soluciones.

4.5. Ángulo entre s -rectas.

Para este concepto se estudiaron dos formas de determinar el ángulo entre dos s -rectas: el primero a partir de **líneas tangentes a una s -recta** y el segundo a partir de **líneas asociadas a una s -recta**. A continuación, se presenta la definición de estas líneas y la manera general de encontrar el ángulo entre dos s -rectas.

4.5.1. Definición de línea tangente a una s -recta.

Sea l una s -recta con ecuación $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$ y un punto A con coordenadas $(x_1, y_1)_S$ sobre l , se denomina línea tangente a l por A al conjunto solución de la ecuación:

$$d'\bar{x} + b'\bar{y} + c' + b'\text{sen}(\bar{x}) = 0, \quad (2)$$

donde

$$\begin{aligned} a' &= a - b\cos(x_1), & b' &= b & y \\ c' &= -ax_1 + bx_1\cos(x_1) - by_1 - b\text{sen}(x_1). \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4. Encuentre la línea tangente a la s -recta l con ecuación $3\bar{x} + 2\bar{y} - 1 = 0$ en el punto $(1, -1)_S$.

Solución: Identificando a los coeficientes $a = 3, b = 2, c = -1, x_1 = 1$ y $y_1 = -1$ y reemplazando en (2) se tiene que los coeficientes de la ecuación de línea tangente son:

$$a' = 3 - 2\cos(1), \quad b' = 2, \quad c' = -1 + 2\cos(1) - 2\text{sen}(1).$$

Luego, la ecuación de la línea tangente a esta s -recta por el punto $(1, -1)_S$ será de la forma:

$$\bar{y} = \frac{2\cos(1) - 3}{2}\bar{x} + \frac{1 - 2\cos(1) + 2\text{sen}(1)}{2} - \text{sen}(\bar{x}).$$

En la Figura 14 se muestra la representación gráfica de la línea tangente a la s -recta l por el punto $(1, -1)_S$.

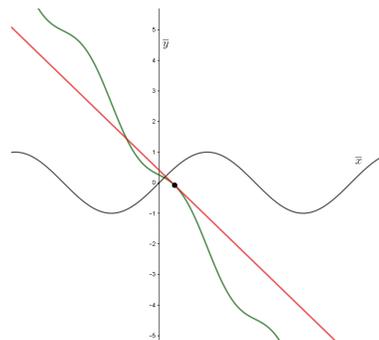


Figura 14: Línea tangente a l por $(1, -1)_S$.

Applet línea tangente a una s -recta:

<https://www.geogebra.org/m/y8h8hmjr>

4.5.2. Definición de línea asociada a una s -recta.

Sea la s -recta l con ecuación $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$ y un punto P con coordenadas $(x_0, y_0)_S$ sobre l , se le denomina línea asociada a l por P al conjunto solución de la ecuación:

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c' + b\text{sen}(\bar{x}) = 0, \quad (3)$$

con $c' = -ax_0 - by_0 - b\text{sen}(x_0)$.

Ejemplo 4.5. Encuentre la línea asociada a la s -recta p con ecuación $-\bar{x} + 2\bar{y} - 5 = 0$ en el punto $\left(4, \frac{9}{2}\right)_S$.

Solución: Primero se determina c' . Sustituyendo los coeficientes a, b, c de la ecuación de la s -recta y los valores $(x_0, y_0)_S$ del punto en (3) se tiene que:

$$\begin{aligned} c' &= -(-1)(4) - 2\frac{9}{2} - 2\text{sen}(4), \\ &= -5 - 2\text{sen}(4). \end{aligned}$$

Luego, la ecuación de la línea asociada a p en el punto $\left(4, \frac{9}{2}\right)_S$ es de la forma:

$$\bar{y} = \frac{1}{2}\bar{x} + \frac{5}{2} + \text{sen}(4) - \text{sen}(\bar{x}).$$

En la Figura 15 se observa la representación de la línea asociada (en rojo) a la s -recta (en verde) por el punto dado.

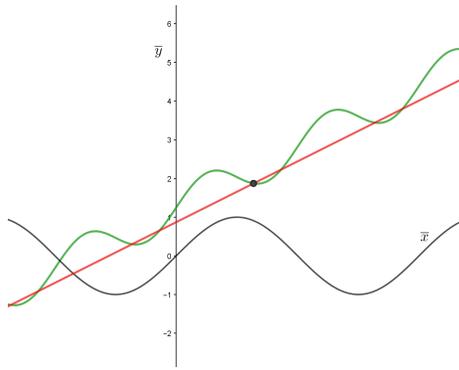


Figura 15: Línea asociada a la s -recta $-\bar{x} + 2\bar{y} - 5 = 0$ por $(4, \frac{9}{2})_S$.

Para nombrar las líneas, se usarán letras griegas y se especificará a cuál tipo de línea se está haciendo alusión. Se puede ver que las rectas del sistema cartesiano (líneas) no son rectas en el *Sistema Seno* sino curvas. Fíjese que para cada punto sobre una s -recta, se tiene una línea asociada o tangente diferente.

Applet línea asociada a una s -recta:

<https://www.geogebra.org/m/sgaysp4w>

4.5.3. Definiciones de ángulo.

A continuación, se presentan dos definiciones de ángulo entre dos s -rectas a partir de líneas tangentes y de líneas asociadas.

- **Ángulo entre s -rectas a partir de líneas tangentes:**
Sean las s -rectas l y t con un único punto P en común y las líneas α y β tangentes a l y t respectivamente, por el punto P . El ángulo entre l y t será el ángulo θ determinado por α y β .
- **Ángulo entre s -rectas a partir de líneas asociadas:**
Sean las s -rectas l y t con un único punto P en común y las líneas α y β asociadas a l y t respectivamente, por el punto P . El ángulo entre l y t será el ángulo θ determinado por α y β .

4.5.4. Ángulo a partir de líneas tangentes.

Sean las s -rectas l y t con el punto $(x_1, y_1)_S$ en común y ecuaciones

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0, \quad y \quad l\bar{x} + m\bar{y} + n = 0$$

respectivamente. Identificando los coeficientes para las ecuaciones de las líneas α y β tangentes l y t , se tiene que la ecuación de α es:

$$d'\bar{x} + b'\bar{y} + c' + b'\text{sen}(\bar{x}) = 0,$$

con $d' = a - b\cos(x_1)$, $b' = b$ y $c' = -ax_1 + bx_1\cos(x_1) - by_1 - b\text{sen}(x_1)$ y la ecuación de β será:

$$l'\bar{x} + m'\bar{y} + n' + m'\text{sen}(\bar{x}) = 0,$$

con $l' = l - m\cos(x_1)$, $m' = m$ y $n' = -lx_1 + mx_1\cos(x_1) - my_1 - m\text{sen}(x_1)$. Luego, el ángulo entre α y β está determinado por

$$\theta = \arctan\left(\frac{-d'm' + b'l'}{b'm' + d'l'}\right). \tag{4}$$

Y por definición de ángulo entre s -rectas a partir de líneas tangentes, el ángulo entre l y t es θ .

Para ejemplificar este concepto se toman las s -rectas l y t que tienen en común el punto $(1, -1)_S$ y tienen las respectivas ecuaciones

$$3\bar{x} + 2\bar{y} - 1 = 0 \quad y \quad 4\bar{x} - 2\bar{y} - 6 = 0.$$

Identificando sus coeficientes se tiene que $a = 3, b = 2, l = 4, m = -2, x_1 = 1$ y $y_1 = -1$, para encontrar el ángulo entre ellas se determinan las ecuaciones de las líneas tangentes y los coeficientes d', b', l', m' , por tanto

$$d' = -3 + 2\cos(1), \quad b' = 2, \quad c' = -1 + 2\cos(1) - 2\text{sen}(1),$$

$$l' = -4 - 2\cos(1), \quad m' = -2, \quad n' = 4 - 2\cos(1) + 2\text{sen}(1).$$

Reemplazando estos coeficientes en (4), resolviendo y realizando los procedimientos algebraicos necesarios; se tiene que el ángulo que forman estas dos s -rectas en el *Sistema Seno* es:

$$\theta = 67,67^\circ.$$

Se puede ver gráficamente como se muestra en la Figura 16.

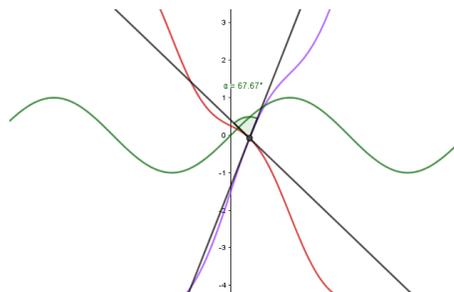


Figura 16: Ángulo entre l y t .

Applet ángulo a partir de líneas tangentes:

<https://www.geogebra.org/m/uvd3ehah>

4.5.5. Ángulo a partir de líneas asociadas.

Análogo al proceso de la definición de ángulo con líneas tangentes, si se tienen dos s -rectas l y t con ecuaciones

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0 \quad y \quad l\bar{x} + m\bar{y} + n = 0$$

respectivamente, y sus líneas asociadas α y β con ecuaciones

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c' + b\text{sen}(\bar{x}) = 0 \quad y \quad l\bar{x} + m\bar{y} + n' + m\text{sen}(\bar{x}) = 0$$

respectivamente. El ángulo θ entre α y β determinado por

$$\theta = \arctan\left(\frac{-am + bl}{bm + al}\right), \quad (5)$$

será el ángulo entre l y t .

Para ejemplificar esta definición se encontrará el ángulo entre las siguientes s -rectas:

$$l: 3\bar{x} + 2\bar{y} - 1 = 0 \quad y \quad t: 4\bar{x} - 2\bar{y} - 6 = 0$$

en el punto de intersección $(1, -1)_S$.

Encontrando la ecuación de la línea α asociada a l usando (3). Se determina el coeficiente c'

$$\begin{aligned} c' &= -(3)(1) - 2(-1) - 2\text{sen}(1), \\ &= -1 - 2\text{sen}(1), \end{aligned}$$

luego, la ecuación de α es:

$$\bar{y} = -\frac{3}{2}\bar{x} + \frac{1}{2} + \text{sen}(1) - \text{sen}(\bar{x}).$$

Análogamente, se concluye que la ecuación de la línea β asociada a la s -recta t es: $\bar{y} = 2\bar{x} - 3 + \text{sen}(1) - \text{sen}(\bar{x})$.

Por último, se determina el ángulo entre las líneas asociadas usando la ecuación (5).

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan\left(\frac{-(-3)(-2) + (2)(4)}{(2)(-2) + (3)(4)}\right), \\ &= \arctan\left(\frac{7}{4}\right), \\ &= 60,26^\circ. \end{aligned}$$

En la Figura 17 se muestra gráficamente el ángulo que forman las s -rectas l y t corroborando lo mencionado en el procedimiento anterior.

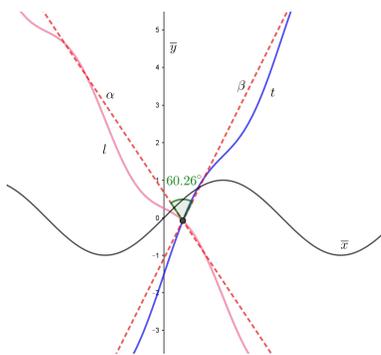


Figura 17: Ángulo entre l y t .

Applet ángulo a partir de líneas asociadas:

<https://www.geogebra.org/m/kujfzzyf>

4.6. s -Rectas paralelas.

Se define el paralelismo entre s -rectas con las definiciones analítica y geométrica del sistema cartesiano:

- Dos s -rectas l y t con ecuaciones

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0 \quad y \quad a'\bar{x} + b'\bar{y} + c' = 0$$

son paralelas si $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. Si $a'\bar{x} + b'\bar{y} + c' = 0$ se puede escribir como $k(a\bar{x} + b\bar{y} + c) = 0$ con $k \neq 0$ entonces también son paralelas.

- Dos s -rectas son paralelas si nunca se intersecan ó si se intersecan en dos o más puntos también son paralelas.

4.7. Resultados de s -rectas paralelas asociados a definiciones de ángulos.

En esta sección se analiza si se cumplen algunos teoremas asociados a las rectas y sus ángulos del sistema cartesiano en el *Sistema Seno*.

- **Teorema paralelas - ángulos correspondientes congruentes:** Sean las s -rectas l y t paralelas con ecuaciones

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0 \quad y \quad a'\bar{x} + b'\bar{y} + c' = 0$$

respectivamente, y la s -recta s con ecuación $d\bar{x} + e\bar{y} + f = 0$ secante a ellas. El ángulo que forma l y s es congruente al ángulo entre t y s .

Usando líneas tangentes: Como l y t son paralelas entonces $-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$; reemplazando en la ecuación de t se tiene

$$a\bar{x} + b\bar{x} + \frac{c'b}{b'} = 0.$$

Sean los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) los puntos de intersección entre l y s y t y s respectivamente, y las ecuaciones de las líneas tangentes a cada s -recta por los puntos mostradas a continuación.

Línea δ_1 tangente a s por (x_0, y_0)
$a''_1\bar{x} + b''_1\bar{y} + c''_1 + b''_1\text{sen}(\bar{x}) = 0;$ $a''_1 = -d - e\cos(x_0), \quad b''_1 = e,$ $c''_1 = -dx_0 + ex_0\cos(x_0) - ey_0 - e\text{sen}(x_0)$
Línea α tangente a l por (x_0, y_0)
$a'_1\bar{x} + b'_1\bar{y} + c'_1 + b'_1\text{sen}(\bar{x}) = 0;$ $a'_1 = a - b\cos(x_0), \quad b'_1 = b,$ $c'_1 = -ax_0 + bx_0\cos(x_0) - by_0 - b\text{sen}(x_0)$
Línea δ_2 tangente a s por (x_1, y_1)
$a''_2\bar{x} + b''_2\bar{y} + c''_2 + b''_2\text{sen}(\bar{x}) = 0;$ $a''_2 = -d - e\cos(x_1), \quad b''_2 = e,$ $c''_2 = -dx_1 + ex_1\cos(x_1) - ey_1 - e\text{sen}(x_1)$
Línea β tangente a t por (x_1, y_1)
$a'_2\bar{x} + b'_2\bar{y} + c'_2 + b'_2\text{sen}(\bar{x}) = 0;$ $a'_2 = a - b\cos(x_1), \quad b'_2 = b,$ $c'_2 = -ax_1 + bx_1\cos(x_1) - by_1 - b\text{sen}(x_1)$

Luego, por la definición de ángulos a partir de líneas tangentes, los ángulos entre δ_1 y α y δ_2 y β son;

$$\theta_{\delta_1, \alpha} = \arctan \left(\frac{-a''_1 b'_1 + b''_1 a'_1}{b''_1 b'_1 + a''_1 a'_1} \right),$$

$$\theta_{\delta_2, \alpha} = \arctan \left(\frac{-a''_2 b'_2 + b''_2 a'_2}{b''_2 b'_2 + a''_2 a'_2} \right).$$

Para que se cumpla que $\theta_{\delta_1, \alpha} = \theta_{\delta_2, \alpha}$ las coordenadas de los puntos de intersección tienen que satisfacer las siguientes ecuaciones

$$eb(\cos(x_1) - \cos(x_0)) = 0,$$

$$(db + ea + eb)(\cos(x_1) - \cos(x_0)) = 0.$$

En conclusión, los ángulos no siempre son congruentes luego, el teorema no se cumple en el *Sistema Seno* con esta definición (ver Figuras 18 y 19).

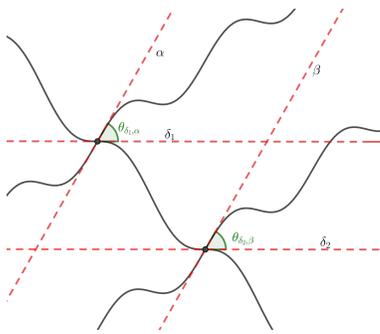


Figura 18: Se cumple.

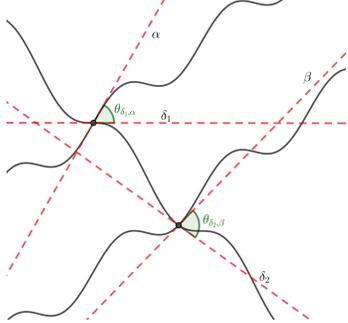


Figura 19: No se cumple.

Usando líneas asociadas: Teniendo las condiciones del teorema se tiene que como l y t son paralelas entonces $-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$, reemplazando en la ecuación de t se tiene

$$a\bar{x} + b\bar{y} + \frac{c'b}{b'} = 0.$$

Sean los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) los puntos de intersección entre l y s y t y s respectivamente, las ecuaciones de líneas asociadas a cada s -recta por los puntos son:

Línea δ_1 asociada a s por (x_0, y_0)
$d\bar{x} + e\bar{y} + f'_1 + esen(\bar{x}) = 0;$ $f'_1 = -dx_0 - ey_0 - esen(x_0)$
Línea α asociada a l por (x_0, y_0)
$a\bar{x} + b\bar{y} + c'_1 + bsen(\bar{x}) = 0;$ $c'_1 = -ax_0 - by_0 - bsen(x_0)$
Línea δ_2 asociada a s por (x_1, y_1)
$d\bar{x} + e\bar{y} + f'_2 + esen(\bar{x}) = 0;$ $f'_2 = -dx_1 - ey_1 - esen(x_1)$
Línea β asociada a t por (x_1, y_1)
$a\bar{x} + b\bar{y} + c'_2 + bsen(\bar{x}) = 0;$ $c'_2 = -ax_1 - by_1 - bsen(x_1)$

Luego, por la definición de ángulos a partir de líneas asociadas, los ángulos entre δ_1 y α y δ_2 y β son;

$$\theta_{\delta_1, \alpha} = \arctan \left(\frac{-ae + bd}{be + ad} \right),$$

$$\theta_{\delta_2, \beta} = \arctan \left(\frac{-ae + bd}{be + ad} \right).$$

En conclusión, los ángulos son congruentes, luego, el teorema *paralelas - ángulos correspondientes congruentes* se cumple en el *Sistema Seno* con la definición de ángulo a partir de líneas tangentes (véase Figura 20).

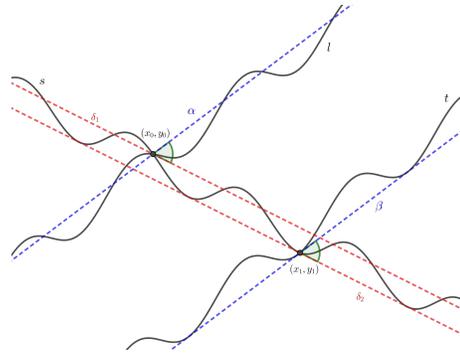


Figura 20: Con la definición de ángulos a partir de líneas asociadas.

Ejemplo 4.6. Se tienen las s -rectas

$$l \rightarrow -\bar{x} + \bar{y} = 0, \quad t \rightarrow 2\bar{x} + \bar{y} - 4 = 0,$$

$$k \rightarrow 4\bar{x} + 2\bar{y} + 3 = 0.$$

Por la definición analítica de paralelismo, t es paralela a k . Luego, l interseca a t en el punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)_s$ y l interseca a k en $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)_s$. Ahora, se determinan las ecuaciones de las líneas asociadas a cada s -recta por los puntos encontrados.

Línea δ_1 asociada a l por $(-1/2, -1/2)_S$ $\bar{y} = \bar{x} + \text{sen}(-1/2) - \text{sen}(\bar{x})$
Línea α asociada a k por $(-1/2, -1/2)_S$ $\bar{y} = -2\bar{x} - 3/2 + \text{sen}(-1/2) - \text{sen}(\bar{x})$
Línea δ_2 asociada a s por $(4/3, 4/3)_S$ $\bar{y} = \bar{x} + \text{sen}(4/3) - \text{sen}(\bar{x})$
Línea β asociada a t por $(4/3, 4/3)_S$ $\bar{y} = -2\bar{x} + 4 + \text{sen}(1/2) - \text{sen}(\bar{x})$

Los ángulos que determinan δ_1 y α y δ_2 y β son:

$$\theta_{\delta_1, \alpha} = \arctan\left(\frac{1+2}{1-2}\right) = \theta_{\delta_2, \beta}$$

$$\theta_{\delta_1, \alpha} = 71,57^\circ = \theta_{\delta_2, \beta}$$

En la Figura 21 se muestra la gráfica de las s -rectas y líneas asociadas y el ángulo que se forma entre ellas.

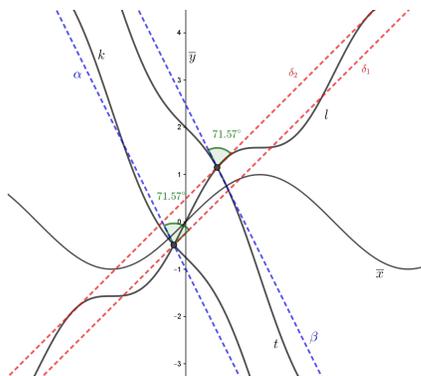


Figura 21: Ángulos congruentes para t y k con respecto a k .

Fíjese que a pesar de que cada punto sobre s tiene una línea asociada diferente, no infiere en el ángulo que determina l y t , es decir, se puede tomar cualquier punto sobre la s -recta para determinar la línea asociada a ella. También, se puede mostrar otros teoremas de la geometría Euclidiana como *paralelas - ángulos alternos internos congruentes* o que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° , entre otros.

4.8. s -Rectas perpendiculares.

Análogo al desarrollo de la teoría en el sistema cartesiano se define la perpendicularidad entre s -rectas como:

- Sean las s -rectas l y t , si el ángulo θ que forman l y t es de 90° entonces l y t son perpendiculares.
- Las s -rectas l y t son perpendiculares si y solo si $m_1 \cdot m_2 = -1$.

En el estudio de estas propiedades, se encontró que la relación entre el ángulo y el producto de las pendientes se cumple en el Sistema Seno usando la definición de ángulo a partir de líneas asociadas pero, con la definición de ángulo a partir de líneas tangentes no se cumple.

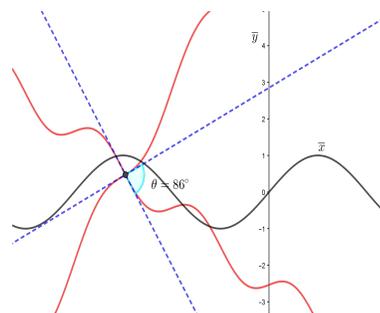


Figura 22: De las pendientes al ángulo.

Con la definición de ángulo a partir de líneas tangentes: Sean las s -rectas l y t con ecuaciones $2\bar{x} + 3\bar{y} + 15,2 = 0$ y $3\bar{x} - 2\bar{y} + 30 = 0$, respectivamente. Estas cumplen que $m_1 \cdot m_2 = -1$ pero las s -rectas no forman un ángulo recto. (ver Figura 22). Ahora, tomando las s -rectas t y l con ecuaciones $-\bar{x} + 3\bar{y} + 30,71 = 0$ y $3\bar{x} + 1\bar{y} + 5 = 0$. En este caso el ángulo que forman por su punto de intersección es de 90° pero el producto de las pendientes no es -1 luego, no se cumple la equivalencia (ver Figura 23).

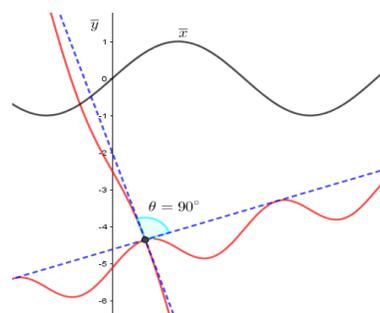


Figura 23: Del ángulo a las pendientes.

Esto se debe a que, como se mencionó cuando se estaba estudiando el Teorema *paralelas - ángulos correspondientes congruentes* desde esta definición de ángulo, si se construyen s -rectas t_i perpendiculares por cada punto de la s -recta l , las s -rectas t_i forman ángulos diferentes con l luego, puede que algunas cumplan con la propiedad y otras no cumplan.

Con la definición de ángulo a partir de líneas asociadas: Se tomarán las s -rectas l y t con ecuaciones

$$-4\bar{x} + 3\bar{y} - 10 = 0 \quad \text{y} \quad 3\bar{x} + 4\bar{y} - 4 = 0,$$

luego, el producto de sus pendientes es -1 y además son perpendiculares. En la Figura 24 se muestra la gráfica de sus líneas asociadas y el ángulo recto que forman.

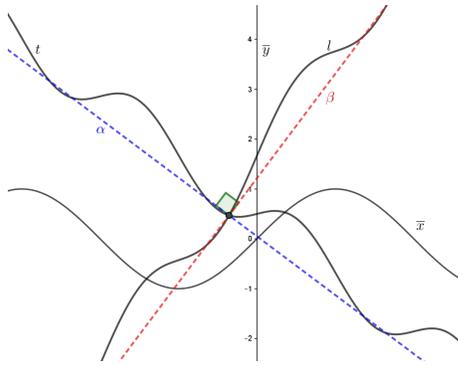


Figura 24: Ángulo entre l y t .

4.9. Distancia entre dos puntos.

Sean los puntos P_1 y P_2 con coordenadas $(x_1, y_1)_S$ y $(x_2, y_2)_S$ respectivamente, la distancia entre ellos se denotará $d_{P_1 P_2}$ y se determinará de la siguiente manera:

$$d_{P_1 P_2} = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2 + \text{sen}(x_1) - \text{sen}(x_2))^2}. \quad (6)$$

Esta distancia se encuentra a partir de la distancia euclidiana entre dos puntos.

Applet distancia entre dos puntos:

<https://www.geogebra.org/m/tdghkukg>

4.10. Distancia de un punto a una s -recta.

Para esta definición se toma un punto P fuera de una s -recta l , se determina la distancia entre cada punto L_i sobre l . (ver Figura 25)

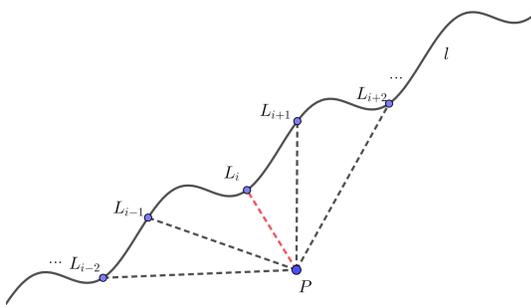


Figura 25: Distancia entre un punto y una s -recta.

La distancia entre P y l será la mínima distancia encontrada entre P y los puntos sobre l (segmento rojo).

- Sea una s -recta l y los puntos $L_1, L_2, \dots, L_j, L_{j+1}, \dots$ sobre l , un punto P fuera de ella y d_{P, L_i} la distancia de P a cada punto sobre l . La distancia de P a l será

$$d_{P, l} = \min[d_{P, L_i}].$$

Se supone una s -recta l con ecuación $a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0$ y un punto $P(x_0, y_0)_S$ fuera de ella. Los puntos L_i que pertenecen a l tienen coordenadas

$$\left(\bar{x}, -\frac{a}{b}\bar{x} - \frac{c}{b}\right)_S,$$

luego, la distancia entre P y los puntos L_i , usando 6, estará dada por la siguiente ecuación

$$d_{P, L_i} = \frac{1}{2} \sqrt{(\bar{x} - x_0)^2 + \left(-\frac{a}{b}\bar{x} - \frac{c}{b} - y_0 + \text{sen}(\bar{x}) - \text{sen}(x_0)\right)^2}. \quad (7)$$

Como se necesita encontrar $\min[d_{P, L_i}]$ se usará el criterio de la segunda derivada viendo a d_{P, L_i} como una función en términos de \bar{x} . Para comodidad de lectura y escritura se omitirá el subíndice P, L_i .

La primera derivada de (7) es

$$d' = \frac{1}{4} \left[\bar{x} - x_0 + \left(\frac{a}{b}\bar{x} + \frac{c}{b} + y_0 - \text{sen}(\bar{x}) + \text{sen}(x_0)\right) \left(\frac{a}{b} + \cos(\bar{x})\right) \right],$$

por el criterio de la primera derivada la ecuación anterior se iguala a 0 y se determina el conjunto

$$A = \{\bar{x} \in \mathbb{R} \mid d'(\bar{x}) = 0\}.$$

Los elementos de este conjunto se nombran como \bar{x}_A luego, la segunda derivada de (7) es:

$$d'' + dd'' = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{a^2}{b^2} - \cos^2(\bar{x}) - \left(\frac{a}{b}\bar{x} + \frac{c}{b} + y_0 - \text{sen}(\bar{x}) + \text{sen}(x_0)\right) (\text{sen}(\bar{x})) \right],$$

evaluando cada \bar{x}_A en d'' se van a tomar todos los valores positivos, es decir, se toma el conjunto B como

$$B = \{\bar{x}_A \mid d''(\bar{x}_A) > 0\}.$$

Para finalizar, se toman los elementos de B y se evalúan en d , por tanto, se concluye que el valor de la distancia entre P y l es el mínimo de los valores de $d(\bar{x}_B)$.

$$d_{P, l} = \min[d(\bar{x}_B)].$$

Como se puede observar, esta demostración está condicionada a que $b \neq 0$. En el caso que $b = 0$ la distancia entre la s -recta l y el punto P , se encontrará con la siguiente ecuación:

$$d_{P, l} = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{c}{a}\right).$$

Ejemplo 4.7. Sea la s -recta l con ecuación $\bar{x} + \bar{y} + 5 = 0$ y el punto P con coordenadas $(4, 3)_S$.

Siguiendo el procedimiento anterior se tiene que los puntos sobre l tienen coordenadas

$$(\bar{x}, -\bar{x} - 5)_S$$

y la distancia entre P y estos puntos L_i esta dada por

$$d_{P, L_i} = \frac{1}{2} \sqrt{(\bar{x} - 4)^2 + (-\bar{x} - 8 + \text{sen}(\bar{x}) - \text{sen}(4))^2},$$

luego, la derivada de esta función es

$$4dd' = \bar{x} - 4 + (\bar{x} + 8 - \text{sen}(\bar{x}) + \text{sen}(4))(1 + \cos(\bar{x})).$$

Ahora, por el criterio de la primera derivada, se tiene el conjunto $A = \{-3,34, -1,35, 0,94\}$ tales que $d'(\bar{x}_A) = 0$ luego, la segunda derivada es:

$$4(d'^2 + dd'') = 1 + (1 - \cos(\bar{x}))(\cos(\bar{x}) - (\bar{x} + 6 - \text{sen}(\bar{x}) + \text{sen}(4))(\text{sen}(\bar{x})))$$

y el conjunto B tendrá el elemento $\{0,94\}$ tal que $d''(\bar{x}_A) > 0$, por último, se evalúa en d y se tiene que $d(0,94) = 3,99$ luego, la distancia entre P y l será $d(0,94) = 3,99$. (ver Figura 26).

$$d_{P,L_i} = 3,99$$

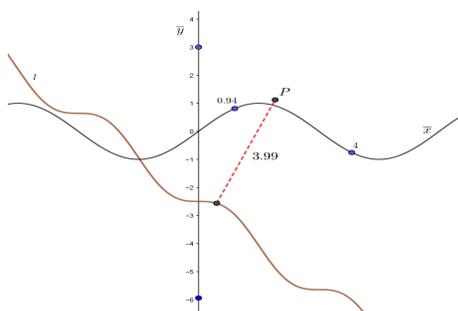


Figura 26: Distancia entre $(4,3)_S$ y $\bar{x} + \bar{y} + 5 = 0$.

Applet distancia entre un punto y una s-recta:

<https://www.geogebra.org/m/zwkfvv7w>

5. Conclusiones.

Una reflexión acerca de la representación de los objetos geométricos es que, usualmente, se presentan como objetos con una sola representación, la cual es la única que cumple las propiedades o la definición. Con el desarrollo de este artículo se evidencia que esto no es cierto, si se toman las definiciones usuales o no, se puede cambiar la manera de representarlos y mostrar que las matemáticas son flexibles en muchos aspectos.

Acerca de las proyecciones de este artículo se dejan algunas preguntas sin resolver en el *Sistema Seno* como:

- Teniendo en cuenta la definición de ángulo a partir de líneas tangentes, ¿se podría encontrar una relación entre las pendientes y el ángulo entre dos s-rectas para realizar una equivalencia entre la definición geométrica y la definición algebraica de la perpendicularidad?
- En el sistema cartesiano, la distancia entre dos puntos se puede definir como la longitud del segmento de recta que los une. Si se toma esta definición en el *Sistema Seno* ¿cómo cambiarían las representaciones de las definiciones que se asocian con distancia?

Agradecimientos.

A Dios, por darme la luz en momentos de oscuridad. A mi familia, por ser siempre mi motivación. Al profesor John, por la oportunidad de presentar este trabajo en la revista.

Referencias.

- [Ap4] T. Apóstol, *Calculus. Vol I*, Reverté, Barcelona, 1984.
- [FS11] F. Fernández Sánchez, *Un estudio de las rectas en planos oblicuos perpendiculares*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2011.
- [Fil98] E. Filloy and F. Hitt, *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum*, Grupo Editorial Iberoamérica **10** (1998), 23-45.
- [Kle68] D. Kletenik, *Problemas de geometría analítica* (1968).
- [Kol06] B. Kolman and D. Hill, *Álgebra lineal*, Pearson, México D.F, 2006.
- [Leh89] C. Lehmann, *Geometría analítica*, Limusa, México D.F, 1989.
- [Men16] A. Mendigaño, *Distancia usual entre dos puntos en diferentes sistemas coordenados del plano y el espacio*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2016.
- [MC11] L. A. Moreno Celeita and O. Carreño Gómez, *Un tratamiento a las cónicas a partir de diferentes sistemas coordenados*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2011.
- [OP12] L. A. Ortiz Puentes, *Representación gráfica y algebraica de la ecuación cuadrática en el sistema PAR*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2012.
- [Ste89] J. Stewart and R. Hernández and C. Sanmiguel, *Introducción al Cálculo*, 1989.
- [Gar19] W. Garzón and S. Niño, *Representación gráfica y algebraica de las ecuaciones cuadráticas y secciones cónicas en el Sistema Seno*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2019.

Acerca del autor: Walter es licenciado en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y actualmente cursa el último semestre de la maestría en matemáticas aplicadas en la Universidad Sergio Arboleda. Es apasionado por los deportes como el fútbol y la natación, le encanta salir de viaje, bailar y compartir tiempo con su familia y cercanos.

OBSTÁCULOS EN LA CONCEPCIÓN DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS Y DE SUS LOGARITMOS

Blanca Margarita Parra Mosqueda *
bparramosqueda@gmail.com

1. Resumen.

El texto que comparto es un entretrejo de experiencias y escritos a lo largo de 46 años. Al mismo tiempo, es un homenaje/agradecimiento a mis mentores, los que me incorporaron como colega sin reparar en cualquiera de las características personales que, en los tiempos actuales, sirven para discriminar y limitar el crecimiento personal y profesional de una persona, especialmente el de las mujeres.

2. Introducción.

En 1977, en talleres con docentes de matemáticas de nivel secundaria, con Jesús Alarcón Bortolussi como mentor, detectamos particularidades en su concepción del concepto de número negativo sin que en ese momento pudiéramos referirlas a cuestiones sobre el desarrollo histórico del concepto, ni a los obstáculos epistemológicos que se evidenciarían posteriormente, al analizar la evolución del concepto. Las visitas del profesor Georges Glaeser a México nos permitieron introducirnos en ese tipo de análisis, conocer la obra de Bachelard[Bac67] respecto a los obstáculos epistemológicos en el desarrollo de un concepto y su relevancia en el diseño de situaciones didácticas y, a partir de ahí, reconocer que las expresiones de los docentes correspondían a etapas en el desarrollo del concepto de número negativo y que, de hecho, reproducían algunas de las concepciones sostenidas por matemáticos como d'Alembert al tiempo que manifestaban los sentimientos de frustración e incomodidad que, como alumnos, describen personajes como Sthendal, en su autobiografía. Entre 1981 y 1984, en cuestionarios y entrevistas que buscaban comprender el desarrollo del concepto de variable en los alumnos, a partir de que son introducidos al cálculo algebraico, en primer grado de secundaria, encontramos el mismo tipo de concepciones sobre los números negativos y algunas percepciones inusitadas sobre el número cero.

En 1979 Jean-Luc Verley, entonces editor de la sección de Historia de las Matemáticas de la *Enciclopedia Universalis* (Francia), puso en mis manos una copia de la sexta memoria de d'Alembert, la cual trata sobre los logaritmos de cantidades negativas[Ale56] para que hiciera un análisis epistemológico del texto, con implicaciones didácticas, lo que pro-

dujo un artículo que sería incorporado a la *Enciclopedia Universalis*. De necesidad, llevar a cabo la tarea encomendada requirió la consulta de muchas otras fuentes, particularmente los artículos “Négatifs” y “Logarithme” que el propio d'Alembert escribió para la Enciclopedia (*Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*), editada entre 1751 y 1772, de cuya edición fue codirector junto con Denis Diderot.

Por razones históricas, en este texto el recorrido comienza con el desarrollo del concepto de logaritmo, continúa con los conceptos de cero y de número negativo y concluye con una parte del análisis realizado en 1979, presentado en un coloquio llevado a cabo en marzo de 1982 en la Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV.

3. Orígenes del concepto de logaritmo.

Una buena parte del conocimiento matemático más antiguo proviene, sin duda, de los matemáticos sumerios (situados en Babilonia, en lo que ahora es Irak). En lo que respecta a los logaritmos, O. Neugebauer[Neu69] señala que “hay mucha evidencia de las habilidades de los escribas del antiguo período babilónico, es el período que va de 1800 a 1600 antes de Cristo” – alrededor del reinado de Hammurabi –. Luego establece que “no solamente es claro de los problemas que tienen que ver con interés compuesto sino también de las tablas numéricas para las potencias consecutivas de números dados. Por otro lado, se tienen textos que tienen que ver con la determinación de los exponentes de números dados. En otras palabras, se había experimentado realmente con casos especiales de logaritmos sin alcanzar un uso general de esta función.”. Posteriormente, en las notas del capítulo 2 del libro señala que “Las tablas para y las correspondientes a los logaritmos aparecen en documentos sumerios”, los cuales aparecen “ilustrados con fotografías, copias, transcripciones, traducciones y comentarios”, en dos de sus libros previos cuyos acrónimos son MKT y MCT.

Los logaritmos, como los conocemos actualmente, se deben a John Napier – matemático, físico y astrónomo, quien vivió entre 1550 y 1617 –, pero su historia se extiende desde Babilonia hasta Newton, y un número considerable de problemas interesantes y soluciones ingeniosas se pueden encontrar en el camino.

La idea original de logaritmo se establece, en pocas pala-

*Escuela Nacional de Estudios Superiores (ENES) UNAM León México. Profesora invitada permanente.

bras, como sigue: dado cualquier número real positivo ponemos en correspondencia las dos progresiones siguientes (una aritmética y una geométrica):

Progresión aritmética: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

Progresión geométrica: $a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, 1, a, a^2, a^3, a^4$.

Y decimos que los logaritmos en la base de los números de la progresión geométrica son los correspondientes de la progresión aritmética.

Tres elementos distintos, pero no separables contribuyeron al descubrimiento de Napier: su conocimiento de la trigonometría y su trabajo como cartógrafo y astrónomo; cada uno de estos dominios de conocimiento, por sí mismo, merece atención para comprender la magnitud del descubrimiento de los logaritmos como regla general, y sus aplicaciones a cálculos trigonométricos con números muy grandes (o muy pequeños) como los resultados de las observaciones en astronomía, la cual requiere del registro de datos precisos de manera continuada. Napier se benefició, además, de todo el conocimiento griego de Pitágoras a Euclides, incluyendo a Arquímedes, por supuesto, y del conocimiento algebraico desarrollado por los matemáticos islámicos y los europeos de los siglos que le anteceden. Particularmente, dice Itard[Ita84], “recordemos que Nicolas Oresme ya utilizaba exponentes fraccionarios, que Chuquet utilizaba exponentes negativos y nulos”. Además, dice, fueron numerosos los matemáticos que establecieron la estrecha relación entre las series aritmética y geométrica, particularmente Chuquet y Stifel.

Sin embargo, fue Napier quien proporcionó al mismo tiempo una teoría sólida y un método práctico del cálculo de logaritmos. Su idea de la construcción de tablas de logaritmos era la de crear tablas que permitieran multiplicar números sin realizar realmente esa operación, sino utilizando la suma (de los logaritmos de los números). Napier construye sus tablas de logaritmos mediante la extracción sucesiva de raíces cuadradas abreviadas y con comentarios sensatos. Sin embargo, la base de los logaritmos utilizados por Napier distaba de ser simple. Por alguna razón, dice Ian Stewart[Ste07], Napier escogió una razón ligeramente menor que 1, a saber 0.9999999. De esa manera, su sucesión geométrica iba recorriendo hacia atrás una serie de números de los muy grandes a los más pequeños. De hecho, continúa Stewart, “comenzó con 10,000,000 y entonces multiplicó por potencias sucesivas de 0.9999999. Si escribimos $Naplog(x)$ para el logaritmo de Napier de un valor x , se tiene que

$$Naplog(10,000,000) = 0$$

$$Naplog(9,999,999) = 1$$

y se satisface la ecuación

$$Naplog(10^7xy) = Naplog(x) + Naplog(y)$$

Posteriormente Henry Briggs, un matemático británico, tras visitar a Napier y con su aprobación, desarrolló nuevas tablas de logaritmos, haciendo que el logaritmo de la unidad fuera cero y que el de 10 fuera 1 – es decir, los logaritmos de base 10 –, y calculó los logaritmos vulgares o decimales de los primeros 31,000 enteros, con una precisión de hasta 14 decimales, relata Itard[Ita84].

4. El caso de los números negativos.

En su muy bien documentado estudio sobre la evolución del concepto de número negativo, Georges Glaeser[Gla81] relata el desarrollo epistemológico de ese concepto que, en términos escolares actuales, pareciera muy simple. En síntesis, dice “se necesitaron más de 1,500 años para que la “regla de los signos” fuera considerada un lugar común por los matemáticos”. En su trabajo hace un estudio pormenorizado de textos que van desde Diofanto hasta finales del siglo XX, en los cuales se detectan algunos de los obstáculos epistemológicos que se interpusieron en el camino de la comprensión de los números negativos. Glaeser refiere las dificultades que con esos números experimentaron matemáticos tan notables como Euler o d’Alembert, las cuales tienen eco, todavía, en las respuestas que estudiantes y docentes dan de viva voz[Par81] y en algunos cuestionarios[Par85].

El mismo Glaeser dice que “la práctica clandestina del cálculo de los números relativos precede en 1600 años a su comprensión”. En ese sentido Stewart [Ste07] y Neugebauer [Neu69] datan el uso de números negativos, por conveniencia para los cálculos, al inicio del primer milenio (unos tres o cuatro siglos antes de Diofanto); los matemáticos chinos resolvían ecuaciones lineales ayudándose de varillas de colores dispuestas sobre una mesa; las varillas rojas eran utilizadas para los términos que debían sumarse mientras que las varillas negras se utilizaban para los términos que debían sustraerse. Stewart aclara que la notación rojo/negro no trataba precisamente con números negativos, sino sobre la operación sustracción; sin embargo, pone las bases para el concepto de números negativos, *cheng fu shu*, y que a partir de ahí los números negativos se representaban con una varilla puesta diagonalmente sobre las que significaban, diríamos, el valor absoluto del número.

En cuanto a Diofanto, Paul Ver Eecke[VE59] dice que una característica que imponía a sus proposiciones era la de solamente reconocerles soluciones racionales, de donde resulta que, cuando una ecuación da para la incógnita un valor irracional o imaginario, declara que la solución al problema es “imposible”. Además, como la noción del valor negativo en sí, es decir independiente de una cantidad positiva de donde uno la resta, era extraña a los matemáticos griegos, Diofanto tampoco admite las soluciones negativas y, entonces, cada vez que las ecuaciones conducen a un valor negativo de la incógnita, declara que esas ecuaciones son “absurdas”. En todos los casos en que Diofanto encuentra soluciones que rechaza, por imposibles o absurdas, utiliza un procedimiento de falsa posición y, en algunos casos, de doble falsa posición para regresar sobre sus pasos y considerar la génesis de los términos de la ecuación para la que no encuentra solución satisfactoria y modificar los coeficientes numéricos de esos términos, adoptando determinaciones arbitrarias diferentes de las enunciadas al inicio del proceso de resolución que lo conduzcan a soluciones positivas racionales. Por su parte, al discutir el tratamiento que Diofanto da a las ecuaciones puras, las cuales contienen solamente una potencia de la incógnita, independientemente del grado, Heath[Hea07] señala que “Diofanto

solamente reconoce un valor de x que satisface la ecuación; así, si la potencia es par, él solamente da (como resultado) el valor positivo, puesto que un valor negativo *per se* era una cosa que él no concebía”.

Probablemente parezca una obviedad que para concebir un número negativo necesitamos concebir el cero no solamente como símbolo para representar el valor posicional de un dígito en una escritura numérica sino como un número susceptible de operarse con los números del sistema que ya utilizábamos.

Alrededor del año 500 DC, el astrónomo indio Aryabhata se propuso desarrollar una manera concisa de almacenar números grandes, dice Robert Kaplan en su maravilloso libro *The Nothing That Is. A Natural History of Zero* [Kap99]. Su sistema utilizaba las nueve vocales del sánscrito para las posiciones de los nueve dígitos posibles en un número. Pero, señala Kaplan, siendo astrónomo, Aryabhata necesitaba escribir números de más de nueve posiciones decimales, lo que lo llevó a duplicar su sistema a 18 posiciones sin que el cero estuviera incluido en su sistema, aunque el mismo Aryabhata explicara que “Las nueve vocales se emplean en dos nueves de lugares” y empleara la palabra ‘kha’ para referirse al espacio entre dos posiciones decimales; esa palabra sería una de las más comúnmente utilizadas, posteriormente, por los matemáticos indios para referirse al cero.

Para el siglo VII DC, Brahmagupta tenía ya una concepción del cero, al que se refería con palabras equivalentes a ‘espacio’ (kha) o ‘vacío’ y ponía un punto sobre los números que debían ser sustraídos. Hacia 1150 Bhaskara utilizaba pequeños círculos, además de puntos, sobre los sustraendos. El mismo Bhaskara, retomando algunas ideas de Brahmagupta, estableció que “negativo tomado de cifra (cero) se convierte en positivo; y afirmativo, se convierte en negativo; negativo, menos cifra, es negativo; positivo es positivo; cifra, nada”. Sin embargo, dice Glaeser, “las obras indias de la época no son más que colecciones de sentencias acompañadas de un ejemplo de aplicación numérica. Pero no se preocupan por explicar ahí por qué “lo negativo multiplicado por lo negativo da afirmativo”. Es decir, el concepto de número negativo todavía no existía.

Glaeser[Gla81b] refiere las dificultades que muchos de los matemáticos más notables experimentaban ante la idea de incluir las cantidades negativas en el sistema de números. De Simón Stevin (1540-1620) dice que, aunque manifiesta que “no hay números absurdos, irracionales, irregulares, inexplicables o sordos (los encontrados a lo largo del desarrollo del álgebra que hoy llamamos superior, fundamentalmente), sino que hay en ellos tal excelencia y concordancia que tenemos materia para meditar noche y día en su admirable perfección”, el número negativo aislado falta en su lista. No dice nada de su derecho a la existencia a título de símbolo de cantidad.

Las raíces “falsas” de una ecuación serían evitadas por matemáticos de la talla de Fermat y Descartes, por ejemplo, aunque comienzan a aparecer como resultados de cálculos científicos a partir del siglo XVII. Pero las explicaciones pedagógicas sobre los números negativos se dan en términos de resultados de una sustracción, aumentos y disminuciones,

deudas y ganancias, etc.

La obra pedagógica de Euler (1707-1783), de quien nadie pondría en duda su capacidad y talento matemático, es reveladora. En el Capítulo III de sus *Elementos de Algebra* [Eul] argumenta a partir de la interpretación de los negativos como deudas, considerando que la multiplicación de cantidades con signo es conmutativa, y razona por eliminación diciendo que, habiendo considerado solamente números positivos hasta ese punto, no puede haber duda de que los productos que hemos visto surgir son también positivos: $+a$ por $+b$ debe dar necesariamente $+ab$. Pero debemos examinar por separado qué producirían las multiplicaciones de $+a$ por $-b$, y de $-a$ por $-b$.

32. Comencemos por multiplicar $-a$ por 3 o $+3$. Ahora puesto que $-a$ debe ser considerado como una deuda, es evidente que si tomamos esa deuda tres veces, debe volverse tres veces más grande, y consecuentemente el producto requerido es $-3a$. Así, si multiplicamos $-a$ por $+b$, obtenemos $-ba$, o, lo que es lo mismo, $-ab$. De aquí concluimos, que si una cantidad positiva se multiplica por una cantidad negativa, el producto debe ser negativo; y la regla es que $+ por + hace +$ o más, y al contrario $+ por -, o - por + da -,$ o menos.

33. Queda por resolver el caso en que $-$ se multiplica por $-$; o, por ejemplo, $-a$ por $-b$. Es evidente, a primera vista, mirando las letras, que el producto será ab ; pero es dudoso si debe ponerse delante del producto el signo $+$ o el signo $-$; todo lo que sabemos es que debe ser uno u otro de esos signos. Ahora digo que no puede ser el signo $-$ porque $-a$ por $+b$ da $-ab$, y $-a$ por $-b$ no puede producir el mismo resultado que $-a$ por $+b$; sino que debe producir el contrario, esto es, $+ab$; consecuentemente, tenemos la siguiente regla: $-$ multiplicado por $-$ produce $+$, en la misma manera que $+$ multiplicado por $+$.

Lo que esto significa es que incluso Euler no tenía una mejor justificación de la regla de los signos. Más aún, al declarar que un número negativo se representa por una letra precedida del signo $-$ (es decir, $-a$ sería siempre negativo), Euler muestra dificultades para comprender la unificación de la recta numérica.

Otro matemático ilustre, contemporáneo de Euler, Jean Le Rond d’Almbert (1717-1783) escribe para la Enciclopedia (*Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, el nombre completo de la obra, de la que fue director junto con Diderot, fue publicada entre 1751 y 1772) un artículo titulado Négatif, que tal vez es el texto más revelador del pensamiento confuso sobre los números negativos en la segunda mitad del siglo XVIII. Lisa Hefendehel-Hebeker[HH91] hace una buena recapitulación sobre los obstáculos en la concepción de los números negativos, encontrados en éste y otros documentos, y sus efectos sobre quienes pretendían adentrarse en el conocimiento de estos entes fantásticos – como en la notable experiencia de Sthendal, descrita en su autobiografía –. Aquí citamos algunos de los razonamientos de d’Alembert, extraídos de su artículo *Négatifs*:

- Las cantidades negativas son lo contrario de las positivas:

donde termina lo positivo, lo negativo comienza.

- Decir que la cantidad negativa está más abajo de la nada, es plantear una cosa que no se puede concebir.
- Se debe recalcar que las cantidades que se llaman negativas y que se ven falsamente como debajo del cero, son muy a menudo representadas por cantidades reales, como en la Geometría en donde las líneas negativas no difieren de las positivas más que por su situación con respecto de alguna línea con un punto común.
- El signo $-$ que se encuentra antes de una cantidad sirve para enderezar y corregir un error que se ha hecho en la hipótesis.
- No hay entonces, real y absolutamente, cantidad negativa aislada: pero si digo que un hombre ha dado a otros 3 escudos, eso quiere decir, en lenguaje inteligible, que le ha quitado 3 escudos.

La influencia del pensamiento sobre los números negativos, externados y publicados por matemáticos de la talla de Euler y d' Alembert, duraría todavía un siglo.

En 1815 Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) fue admitido como profesor de la École Polytechnique donde propuso cambios en la estructura de los cursos de análisis matemático, para el primer año de estudios, y de mecánica para el segundo año. El Curso de análisis, como era costumbre, comenzaría con una sección sobre análisis algebraico. Esta sección inicial introdujo tres novedades, presentadas como unidades del curso:

- “Expresiones imaginarias”, para ser enseñada antes de que se introdujeran el teorema de DeMoivre y la exponencial imaginaria;
- Relativa a la diferencia entre funciones continuas y funciones discontinuas; un tema que, aparentemente, estaba totalmente descuidado en el programa tradicional;
- Referente a las normas que rigen la convergencia de series.

En 1821 publica su curso sobre análisis estableciendo, en los Preliminares[Bra09], sus concepciones sobre la naturaleza de los números:

Siempre tomamos el significado de los números en el sentido que se usa en aritmética, donde los números surgen de la medida absoluta de las magnitudes, y solo aplicaremos el término cantidades a cantidades reales positivas o negativas, es decir a números precedidos por los signos $+$ o $-$.

Sin embargo, añade que el signo de las cantidades es asimilado a un estado simbolizado por un adjetivo: magnitudes que representan agrandamientos van representadas por números precedidos del signo $+$, y las magnitudes que deben servir de disminuciones por números precedidos del signo $-$. A lo largo de dos páginas utiliza esa metáfora para justificar

las propiedades aditivas de los números negativos. Luego, sin más, deja de lado la metáfora para dar una forma dogmática de la multiplicación, sin preocuparse por la comprensión de las reglas:

En álgebra, usamos letras para representar cantidades y números. Puesto que es costumbre clasificar los números a como cantidades positivas, podemos denotar la cantidad positiva que tiene como valor numérico el número A por $+A$ o simplemente por A , mientras que la cantidad negativa opuesta se denota por $-A$. Asimismo, cuando la letra a representa una cantidad, se acostumbra a considerar las dos expresiones a y $+a$ como sinónimos, y denotar por $-a$ la cantidad que es opuesta a $+a$. Estos comentarios bastan para establecer lo que llamamos la regla de los signos

Enuncia así un primer teorema en la Nota I, que en realidad es el primero de los apéndices al final de su libro:

Teorema 4.1. *El producto de dos signos similares es siempre $+$, y el producto de dos signos opuestos es siempre $-$.*

Las reticencias en las consideraciones de los números con signo se verán reflejadas en el tratamiento de los números complejos que es uno de los temas introducidos en su curso. Cauchy comienza el desarrollo del Capítulo 7 de su libro ¹, “Sobre las expresiones imaginarias y sus módulos”, declarando que

En análisis, llamamos *expresión simbólica* o símbolo a toda combinación de signos algebraicos que no significan nada por sí mismos o a los que atribuimos un valor diferente del que naturalmente deberían tener. Asimismo, llamamos ecuaciones simbólicas a todas aquellas que, tomando las letras y las interpretaciones según las convenciones generalmente establecidas, son inexactas o no tienen sentido, pero de las cuales podemos deducir resultados exactos modificando y alterando las ecuaciones mismas o los símbolos que las componen, según reglas fijas. El uso de expresiones simbólicas o ecuaciones es a menudo un medio para simplificar los cálculos y de escribir en forma abreviada resultados que parecen bastante complicados. Entre esas expresiones simbólicas o ecuaciones que son de alguna importancia en el análisis, conviene distinguir sobre todo las que llamamos imaginarias. Vamos a mostrar cómo podemos darles un buen uso.

Inmediatamente, procede a plantear las identidades trigonométricas para el seno y el coseno de la suma de dos ángulos y a considerar el producto de las expresiones

$$\cos(a) + \sqrt{-1}\sin(a) \text{ y } \cos(b) + \sqrt{-1}\sin(b)$$

“Como si $\sqrt{-1}$ fuera una cantidad real cuyo cuadrado es igual a -1 ”.

Los números complejos hicieron su aparición formal en el *Artis magna, sive de regulis algebraicis* (1545) de Cardano (1501-1576), en el proceso de resolver ecuaciones cúbicas[Car93]. Siglo y medio después, en 1702, Bernoulli investigaba el proceso de integración aplicado a los recíprocos de cuadráticas, lo cual no presentaba problema si, al aplicar el

¹Op. Cit. Págs. 138-139

método de integración por fracciones parciales, la cuadrática en cuestión tenía raíces reales. Pero ¿y si no fuera el caso? ¿Cómo puede integrarse el recíproco de $x^2 + 1$, por ejemplo?, plantea Stewart[Ste07].

Bernoulli admitía una analogía entre los números reales y los complejos, así como la existencia de los logaritmos de los números complejos, gracias a un principio de permanencia establecido por Albert Girard (1595-1632) según el cual las identidades obtenidas para los números reales son también válidas cuando se trata de números complejos. Esta confianza en su existencia le había permitido llegar a resultados tan notables como el establecimiento de que $\text{Log}(i) = \frac{1}{2}\pi i$ [Par82].

Sin embargo, estos cálculos llevaban implícitos la creencia en la existencia de una función unívoca definida para todo número complejo z no nulo, y con las mismas propiedades de la función logarítmica de valor real. Pero en el desarrollo de la integración de fracciones racionales se deben de considerar los logaritmos de números reales negativos; mantener la univocidad de la función conduce a una serie de contradicciones mayores.

5. Logaritmos de números negativos.

La controversia provocada por las contradicciones en torno de los logaritmos de números negativos comienza entre el propio Bernoulli y Leibniz; el primero argumentaba que el valor debía ser real, mientras que el segundo insistía en que era complejo. A la discusión se suma Euler, quien muestra que, de hecho, la función es multivaluada, y da valores explícitos que resultan de los cálculos; finalmente se incorpora d'Alembert y comienza una disputa con Euler sobre el tema.

En su discusión, partiendo del debate entre Bernoulli y Leibniz, Euler dice que, lo que pasa es que “se supone ordinariamente que a cada número solo corresponde un único logaritmo y, por poco que se reflexione, se encontrará que todas las dificultades y contradicciones solamente subsisten en tanto que se suponga que a cada número solamente corresponde un único logaritmo” [Par82].

Stewart hace una síntesis de los cálculos de Euler para mostrar que la función logaritmo, cuando se aplica a cantidades negativas, es multivaluada [Ste07].

En su artículo “Logarithme” [Ale], en la *Enciclopedia*, después de exponer la teoría conocida en ese momento sobre los logaritmos y las funciones de una variable real, d'Alembert concluye con este párrafo:

Nous terminerons celui-ci par une question qui a été fort agitée entre MM. Léibnitz & Bernoulli. Les logarithmes des quantités négatives sont-ils réels ou imaginaires? M. Léibnitz tenoit pour le second, M. Bernoulli pour le premier. On peut voir les lettres qu'ils s'écrivoient à ce sujet ; elles sont imprimées dans le commercium epistolicum de ces deux grands hommes, publié en 1745 à Lausanne. J'eus autrefois (en 1747 & 1748) une controverse par lettres avec le célèbre M. Euler sur le même sujet ; il soutenoit l'opinion de M. Léibnitz, & moi celle de M. Bernoulli. Cette controverse a occasioné un savant mémoire de M. Euler; imprimé dans le volume de

l'académie de Berlin pour l'année 1709. Depuis ce tems, M. de Foncenex a traité la même matiere dans le premier volume des mémoires de l'académie de Turin, & se déclare pour le sentiment de M. Euler qu'il appuie de nouvelles preuves. J'ai composé sur ce sujet un écrit dans lequel je me déclare au contraire pour l'opinion de M. Bernoulli. Comme cet écrit aura probablement vu le jour avant la publication du présent article, je ne l'insérerai point ici, & je me contenterai d'y renvoyer mes lecteurs, ainsi qu'aux écrits dont j'ai parlé; ils y trouveront toutes les raisons qu'on peut apporter pour & contre les logarithmes imaginaires des quantités négatives. Je me bornerai à dire ici, 1°. Que si on prend entre deux nombres réels & positifs, par exemple 1 & 2, une moyenne proportionnelle, cette moyenne proportionnelle sera aussi-bien- 2 que + 2, & qu'ainsi le logarithme de- 2 & celui de 2 seront le même, savoir log. 2/2. 2°. Que si dans l'équation $y = c^x$ & le logarithmique (Voyez LOGARITHMIQUE & EXPONENTIEL) on fait $x = \frac{1}{2}\log 2$, on aura, & qu'ainsi le logarithme aura des ordonnées négatives & positives, en tel nombre qu'on voudra à l'infini ; d'où il s'ensuit que les logarithmes de ces ordonnées seront les mêmes, c'est-à-dire des quantités réelles. 3°. A ces raisons ajoutez celle qui se tire de la quadrature de l'hyperbole entre ses asymptotes, que M. Bernoulli a donnée le premier, & que j'ai fortifiée par de nouvelles preuves ; ajoutez enfin beaucoup d'autres raisons que l'on peut lire dans mon mémoire, ainsi que mes réponses.

En el fondo, d'Alembert rechaza la idea de una función de variable real multivaluada. Esta noción, apenas presentada por Euler, representa una ruptura con la construcción matemática de Leibniz y con los desarrollos de Bernoulli; al aceptarla, además, hay que echar por tierra el famoso “principio de permanencia” de Girard.

En su argumentación, d'Alembert dice que “me parece que M. Euler no responde de una manera satisfactoria a la objeción sacada de que $2\log(+a) = 2\log(-a)$. Esta fórmula significa (o, si no, hay que renunciar a todas las denominaciones analíticas) que el doble del logaritmo de $+a$ es igual al doble del logaritmo de $-a$, y no que la suma de dos logaritmos diferentes de $+a$ es igual a la suma de dos logaritmos diferentes de $-a$ ”. A pesar de la claridad de Euler, d'Alembert no renuncia a su sentimiento del carácter real y único de los logaritmos de números negativos y busca reafirmar sus sentimientos apoyando las ideas de Bernoulli.

Las dificultades que d'Alembert muestra a lo largo de sus desarrollos reposan en la necesidad de mantener principios hasta entonces no contradichos, los que habían permitido el desarrollo del cálculo de variables reales hasta ese momento, sobre los cuales se había construido también una buena parte de la teoría de los números complejos y cuya puesta en duda significaba una verdadera ruptura.

Agradecimientos.

Mi agradecimiento a la Fundación Universitaria Konrad Lorenz y a John A. Arredondo por su muy atenta y especial invitación a colaborar en este número del Paskín Matemático.

Un gran proyecto en apoyo de la divulgación de las matemáticas.

Referencias.

- [Bac67] Gaston Bachelard, *La Formation de l'esprit scientifique*, Librairie philosophique J. Vrin., París, 1967.
- [Ale56] Jean le Rond d' Alembert, *Opuscles Mathématiques*, Tome Premier., París, 1756.
- [Neu69] O Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, Dover Publications., New York, 1969.
- [Ita84] Jean Itard, *Essais d'histoire des mathématiques*, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard., París, 1984.
- [Ste07] Ian Stewart, *The Story of Mathematics: From Babylonian Numerals to Chaos Theory*, Quercus, 2007.
- [Gla81a] G Glaeser, *Epistémologie des nombres relatifs*, Recherches En Didactique Des Mathématiques, 1981.
- [Gla81b] ———, *Epistemología de los números relativos*, CINVESTAV., México D.F., 1981.
- [Par81] Blanca Parra, *Análisis de proceso de un curso de formación para profesores del nivel medio básico*, CINVESTAV., México D.F., 1981.
- [Par85] ———, *Résultats d'une observation sur la notion de variable chez les élèves mexicains du deuxième cycle du secondaire et de l'école normale supérieure de Mexico et d'une étude critique des manuels*, Universidad de Paris., París, 1985.
- [VE59] Paul Ver Eecke, *Diophante d'Alexandrie. Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 1959.
- [Hea07] Thomas Heath, *Diophantos of Alexandria; a Study in the History of Greek Algebra*, Kessinger Publishing's Legacy Reprint Series, 2007.
- [Kap99] Robert Kaplan, *The Nothing That Is. A Natural History of Zero*, The Nothing That Is. A Natural History of Zero, 1999.
- [Eul] Leonhard Euler, *Elements of Algebra*, Kindle Edition.
- [HH91] Lisa Hefendehl-Hebeker, *Negative Numbers: Obstacles in Their Evolution from Intuitive to Intellectual Constructs*, For the Learning of Mathematics, 1991.
- [Bra09] Robert Bradley, *Cauchy's Cours d'analyse. An annotated Translation*, Springer, 2009.
- [Car93] Girolamo Cardano, *Ars Magna, or, The Rules of Algebra*, Dover, 1993.
- [Par82] Blanca Parra, *D'Alembert y los logaritmos de números negativos*, CINVESTAV., México D.F., 1982.
- [Ale] Jean le Rond d' Alembert, *Logarithme*, University of Chicago.

Acerca del autor: Blanca Margarita Parra Mosqueda tiene una Licenciatura en Física y Matemáticas por el Instituto Politécnico Nacional de México, una maestría en Ciencias en Matemática Educativa por el CINVESTAV, México, y un doctorado en Didáctica de las Matemáticas por la entonces Facultad de Ciencias de París, ahora Universidad París-Diderot. Su interés se centra en el desarrollo de propuestas didácticas sobre matemáticas, orientadas a alumnos y docentes de todos los niveles, ejecutadas a través de cursos y talleres y el desarrollo de materiales. Pasatiempos: leer, conversar, cocinar.

Mate uento



La poción infinita

Dominador, opresor y poderoso. Así era Zenón, el rey de Eufros, una antigua civilización que se venía desarrollando entre los ríos Tigris y Éufrates. A pesar de ello, Zenón sabía perfectamente cómo ocultar su verdadera identidad para conseguir halagos por parte de todo el mundo.

- Es el ejemplo que hay que dar a nuestros descendientes - proclamaba el presidente del Consejo de Ancianos en uno de sus discursos.

- Es tan inteligente y optimista, seguramente hará de Eufros la civilización más importante de todas - comentaban los comerciantes de la ciudad.

Pero un día, Uruk, el hermano de Zenón, llegó a la ciudad después de haber terminado su larga travesía de dos años por el Mediterráneo. A medida que se iba acercando a la comunidad, escuchaba cómo todos hablaban del rey de Eufros - no tenía ni idea de quién se trataba - y cuando llegó al centro de la ciudad, quedó alucinado al observar una estatua de 5 metros de alto que representaba a su hermano.

- ¡Con que este fullero logró el reinado de Eufros! - Exclamó Uruk, sin disimular su hiel ante semejante noticia.

Y es que Uruk tal vez era el único ser viviente que conocía a Zenón en su totalidad; fue testigo de todas las estafas con las que se lucraba en su juventud; era un tramposo que siempre lograba lo que deseaba a punta de manipulación, y como siempre, sabía exactamente cómo debía actuar para limpiar su nombre ante la sociedad. En definitiva, un impostor.

Sin embargo, había un secreto que nadie más que Uruk sabía. Su hermano había asesinado al antiguo rey de Eufros para quedarse con el reinado en las próximas votaciones y así, formar la dictadura más grande de todas las civilizaciones vecinas. Zenón amenazó a Uruk con asesinarlo si esto salía a la luz, por lo que Uruk decidió olvidarse de su hermano, olvidarse de Eufros - que quedó a manos de los escribas y sacerdotes, mientras se decidía el futuro de la civilización - y emprender un largo viaje que terminaría trayéndolo de nuevo a la ciudad, pues sus constantes insomnios a causa de la culpabilidad que sentía por su cobardía de no haber revelado la verdad ante el pueblo, no lo dejaban tranquilo noche tras noche.

- ¡Te vas a arrepentir de haber regresado a mi pueblo! - pensó Zenón, quien acababa de enterarse del regreso de su hermano a la ciudad.

Atemorizado e impaciente, emprendió una afanada búsqueda por encontrar al mejor hechicero del pueblo, con el fin de comprarle la fórmula de una poción tal que, al dársela a Uruk, este muriera inmediatamente y con ello, conseguir

que su secreto muriera con él. Así que convocó a todos los hechiceros del pueblo al palacio ofreciendo una gran suma de dinero para aquel que le convenciera de que tenía el más potente y efectivo veneno.

Después de una agotante jornada escuchando a cada uno de los hechiceros que se iban acercando al palacio, entró Lexi, un hechicero reconocido por camuflarse en cuerpos ajenos y confundir a los ciudadanos sobre su verdadera identidad. El hechicero no tuvo que esforzarse mucho para convencer a Zenón de que él era el mejor hechicero del pueblo y de que su poción no tendría fallo alguno, así que procedieron a reunirse en las salas arcanas del palacio, en donde Lexi recibió las bolsas de dinero prometidas por Zenón.

- Preparar la poción requiere de mucha precaución, una gota más o una gota menos que viertas en el recipiente, estropeará el veneno y ya no funcionará. Lo más importante es el peso final de la poción, 1 gramo - dijo el hechicero.

- ¡Pero yo soy un rey, no un científico, ni nada similar! ¿Cómo pretende que yo haga eso? ¿Acaso no podría usted ayudarme a prepararla?

- No funcionaría. Yo soy hechicero, nuestras energías son muy diferentes, y aunque parezca increíble, este es uno de los ingredientes más importantes en el proceso. El veneno solo servirá si es preparado por la persona que lo va a utilizar.

Entonces el rey comenzó a escuchar con atención las palabras del hechicero.

- La mitad de la poción estará conformada por el sudor de la palmera Sagú. Luego tomarás varios lirios y los prensarás, de allí tomarás únicamente 0.25 gramos de ese líquido. Mientras se mezclan ambas sustancias, rasparás un haba de castor hasta obtener una octava parte de todo el veneno.

- ¡Espere! - gritó el rey - ¿Y en dónde se supone que hallaré cada una esas plantas tan exóticas que usted está mencionando?

- No se preocupe, yo he cultivado cada una de estas plantas por cientos de años, solo tiene que ir a mi jardín y tomar las que necesite, le respondió Lexi.

- Está bien, continúe.

- El 6.25 % de la poción la compondrán cristales de Schefflera. Aquí deberá percatarse de que los cristales que tome sean de color violeta. Si toma cristales de otro color, hará que la poción no sea efectiva. Recuerde, todo depende de usted. Finalmente, 1/32 gramos corresponderán al néctar de las flores del Azafrán Croco y la mitad del peso de este pertenecerá al néctar de las flores de la Kalanchoe. Todos los ingredien-

tes deben mezclarse muy bien y sabrá que está listo cuando la mezcla se torne verdosa.

Una vez el hechicero terminó de dar las indicaciones, el rey se dirigió directo al jardín para comenzar con su preparación. Siguió todas las indicaciones dadas por el hechicero, iba pesando cada uno de los ingredientes para asegurar sus proporciones y una vez terminada la poción, la colocó encima de la báscula gramera, pero, observó algo extraño, el peso de la poción no era de un gramo, tal como se lo había indicado el hechicero, pues faltaban aproximadamente 0.015 gramos. Entonces Zenón volvió a preparar la poción, asegurándose una vez más de seguir todas las indicaciones del hechicero, gramo por gramo, gota por gota. Sin embargo, cuando volvió a pesar la poción, notó que faltaban los mismos 0.015 gramos; aun así, Zenón, frustrado y algo airado, pensó que no sería tan grave, pues era una cantidad demasiado insignificante como para que arruinase su plan.

Y complacido el rey, combinó su poción con una aromática de hierbas finas, provenientes de las plantaciones más exóticas que se encontraban plantadas cerca al río Tigris, y la razón era que esta era la bebida que tanto le encantaba a su hermano Uruk. Luego, contactó a uno de sus amigos terratenientes para que fuese él quien le brindase esa bebida a Uruk, y así poner fin a su secreto más preciado. Se escondió detrás de unas columnas de la plaza para observar de una vez por todas, el momento en el que su hermano tomara la bebida y su cuerpo se fuera consumiendo lentamente por el veneno de cada una de las plantas que conformaron la poción.

Se acercó el terrateniente a Uruk y después de una buena charla, le ofreció la bebida, quien, al sentir el olor de las finas hierbas, no dudó un segundo en tomar un sorbo. Zenón estaba afanoso de ver a su hermano yacer muerto en el suelo de la plaza, sin embargo, pasaron dos minutos y no había sucedido nada, su hermano lucía como si hubiese tomado un sorbo de agua.

Furioso y colérico, se fue Zenón a su palacio e intentando buscar una respuesta al porqué del fracaso de la poción, se topó con uno de sus amigos hechiceros que había decidido rechazar y le contó exactamente todas las indicaciones que Lexi le había dado, intentando encontrar una respuesta al fracaso de la poción.

- Para empezar, yo no conozco muy bien a Lexi, para muchos hechiceros él es nuevo aquí, pero amigo mío, creo que usted ha sido timado - le dijo su amigo el hechicero.

- ¡Demonios! Eso es imposible, la estafa está penalizada en Eufros.

- Pues, señor, estuve revisando la receta del veneno que el hechicero Lexi le propuso y esas plantas solo se pueden usar en unas proporciones exactas, si vas a utilizar otra planta venenosa, su proporción debe ser la mitad de la última que utilizaste; creo que le falta una parte a la poción.

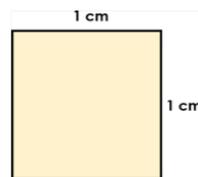
- ¿A qué se refiere?

- Hay algo extraño con las proporciones de los ingredientes - le dijo el hechicero.

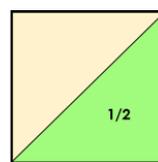
Y sacó su papiro para explicarle al rey.

- Sí, Lexi le dijo que toda la poción pesaría un gramo, ¿no?

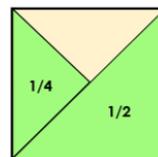
Entonces hagamos de cuenta que ese gramo está representado en este cuadrado de proporciones 1 cm x 1 cm - y dibujó el siguiente cuadrado en el papiro



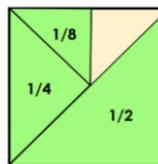
- Así, todos los ingredientes que tiene la poción estarán contenidos en el cuadrado. Veamos, dice que la mitad de la poción estará conformada por el sudor de la palmera Sagú, eso lo podríamos ver de la siguiente manera - y trazó una diagonal del cuadrado para representar esta proporción:



- Ahora dice que los lirios representan 0.25, es decir $\frac{1}{4}$ de la poción - y pintó esa cantidad así:



- Sigamos; la octava parte es del haba de castor, es decir - y volvió a trazar otra línea que ilustraría la proporción de este ingrediente:



El hechicero se quedó pensando por unos minutos y continuó.

- No sé si ya se dio cuenta - le dijo el hechicero.

- Creo que sí, pareciera que la cantidad del siguiente ingrediente es la mitad de la cantidad del ingrediente anterior.

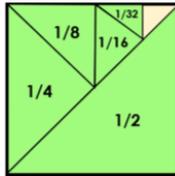
- ¡No lo pudo decir mejor! Note usted que la cantidad del siguiente ingrediente, los cristales de Schefflera, corresponde a la dieciseisava parte de la poción, es decir la mitad de la cantidad del haba de castor. Y así sucesivamente.

- Bueno, pero sigo sin comprender cuál es la idea de este patrón - respondió el rey

- Si sumamos todas las proporciones de los ingredientes - y escribió en el papiro la suma que debía calcularse:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

- Esa suma es igual a $\frac{63}{64}$, aproximadamente 0.98 gramos, por esa razón falló el veneno. Si seguimos completando nuestro cuadrado con las proporciones, esto se verá así – y el hechicero le mostró sus nuevos trazos:



- ¿Sí logra visualizar que hay un espacio que no se ha logrado rellenar? Eso representa esa aproximación de los 0.015 gramos que le hacían falta cuando pesaba el veneno. No es que usted hubiese seguido mal las indicaciones, es que no se las dieron completas – continuaba explicando el hechicero

El rey no podía creer lo que estaba viendo, pero se le ocurrió una idea.

- Seguramente falta uno o dos ingredientes en la poción para completar lo que hace falta, y como ya descubrimos el patrón, tal vez si terminamos la poción con otras plantas venenosas que de pronto usted haya utilizado, podría servir el veneno - propuso el rey Zenón.

- Amigo, lo siento, pero esa idea es totalmente absurda. Puedo notar que usted no ha comprendido el patrón en su totalidad. La realidad es que nunca va a tener el veneno completo porque le faltan infinitos ingredientes para lograr que pese exactamente un gramo.

- ¡Absurda es su idea de que faltan infinitos ingredientes! – le respondió Zenón al hechicero.

- Volvamos a la suma de las proporciones – el hechicero le mostró la suma que había escrito en su papiro –, siempre va a haber una nueva fracción que se incorpora a la suma y no hay forma de que se acabe, note que el denominador de la fracción es cada vez mayor, no tiene límite – y volvió a escribir sobre el papiro

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \dots$$

Continúo hablando el hechicero.

- Lexi usó una de las series geométricas más perversas del mundo de la hechicería, para darle la poción.

- ¿Perversas?

- Así es, pues la única forma para obtener un gramo del veneno es sumando una cantidad infinita de proporciones.

Zenon se encontraba anonadado. Esta es la primera vez que algo le salía mal.

- Por cierto, señor, nunca me comentó para qué necesitaba ese veneno, ¿a quién desea asesinar? - le preguntó el hechicero.

- Eso no es de su incumbencia, no lo traje aquí para que me venga a cuestionar - y despidió al hechicero apresuradamente, temiendo de que pudiese sospechar sus verdaderas intenciones.

¿Pero en dónde podría estar Lexi?, se cuestionaba el frustrado rey mientras iba caminando a su palacio. Al parecer nadie lo conocía, ¿será que se fue del pueblo?, ¿por qué lo engañó de esa manera? Y muchas otras preguntas rondaban en la cabeza del rey.

La verdad es que Lexi aún seguía en el pueblo, sin embargo, solía camuflarse en otros cuerpos y confundir al enemigo, un hechizo que nadie pudo siquiera igualar. Y es que Lexi, no era ningún hechicero, como hacía creer a los demás; era el dios de la sabiduría, Thot, y desde que ayudó al hijo de Osiris a reconstruir la mayor parte de su ojo, pieza a pieza - después de haber batallado contra su tío Seth - Thot dedicó el resto de su vida salvar las vidas de aquellos que eran amenazados por sus codiciosos y celosos familiares. En esta ocasión, iba en busca de Uruk, a quien obligaría a salir del pueblo para nunca más volver.

FIN.

Leidy Catherine Sánchez Ascanio
leidyc.sancheza@konradlorenz.edu.co

Acerca del autor: Leidy es ingeniera industrial y matemática. Es una amante de las novelas policíacas y del mundo profesional del crimen; desde este año se está preparando para ser boxeadora profesional, donde espera hacer su debut antes de que finalice el año.

PASKÍN-CHALLENGE

CONCURSO PARA ESTUDIANTES DE COLEGIO

Un recorrido óptimo por el centro de Bogotá

Una turista visita Bogotá con el objetivo de conocer el centro de la ciudad. Después de leer en internet sobre la ciudad, creó la siguiente lista de lugares que quería conocer, e incluyó el tiempo que deseaba permanecer en cada uno:

- La Plaza de Bolívar (45 minutos).
- El Museo del Oro (6 horas).
- La terraza de la Torre Colpatria (30 minutos).
- La plaza de la Perseverancia (2 horas).
- La exposición del Museo Botero (6 horas).
- La Biblioteca Luis Ángel Arango (7 horas).
- El cerro de Monserrate (5 horas).
- El Museo Nacional (6 horas).
- El Museo de Arte Moderno (150 minutos).

La turista se hospedará en el Hotel Tequendama, ubicado en la Carrera 10 # 26-21. Estando ahí, planea iniciar su recorrido a los lugares de interés a las 8:00 a.m. Después, almorzará todos los días entre las 12:00 y la 1:00 p.m., continuará su recorrido y regresará al hotel máximo a las 5:00 p.m. Dado que la turista realizará todos los recorridos caminando, consideraremos que se desplazará a una velocidad constante de 4.5 km/hora.

Con el objetivo de conocer todos lugares en el menor tiempo posible, ¿qué lugares deberá conocer cada día y en qué orden?

Para resolver el problema tenga en cuenta la siguiente información:

- El objetivo consiste en diseñar un cronograma detallado que minimice lo más posible el tiempo que la turista está por fuera del hotel.

- Para los recorridos podrá utilizar cualquier camino entre la carrera décima (sobre la que está ubicado el hotel) y la carrera segunda este (sobre la que está ubicada la entrada al cerro de Monserrate), así como entre las calles 31 (sobre la que está ubicada la Plaza de la Perseverancia) y la calle 11 (sobre la que está ubicada el inicio de la Plaza de Bolívar).

- Utilice la aplicación Google Maps para diseñar el mapa que la turista utilizará.

- No se deben considerar tiempos de desplazamiento para almorzar ni buscar restaurantes, ya que la turista almorzará siempre en alguna de las atracciones turísticas. Almorzar se puede hacer antes, durante o después de una visita. En cualquier caso, esa hora de almuerzo no se debe incluir como el tiempo de visita a un sitio.

- La turista puede regresar al hotel en cualquier momento del día, pero nunca después de las 5 pm. Por eso, el cronograma detallado de su visita debe también considerar los tiempos que toman los desplazamientos.

- Los tiempos de cada desplazamiento se deben redondear hacia abajo. Por ejemplo, si ir del punto A al punto B toma 3 minutos y 45 segundos, entonces se considera que el tiempo del desplazamiento es de 3 minutos.

- Cada lugar debe visitarse en un solo día y de manera continua. Por ejemplo, si la visita al sitio A es de 5 horas, la turista no puede pasar 3 horas un día y luego 2 horas otro día. El almuerzo, sin embargo, puede interrumpir la visita y es el único caso en el cual la visita a un sitio no es continua.

Bases del Concurso:

Elegibilidad:

Estudiantes menores de 18 años, de cualquier nacionalidad y pertenecientes a un colegio colombiano.

Duración:

El concurso finaliza un año después de la publicación del Paskín que presenta el problema, o hasta que haya una persona ganadora.

Documento Solución:

La solución debe presentarse de manera individual en un documento formal, escrito en español, en el que se explique de manera detallada la solución al problema planteado.

La primera página del documento debe contener por lo menos los siguientes seis elementos:

- (1) El nombre completo de la persona participante.
- (2) El curso de la persona participante.
- (3) La edad de la persona participante.
- (4) El nombre completo del colegio de la persona.
- (5) Municipio o ciudad de residencia.
- (6) Teléfono y correo electrónico de contacto.

El cuerpo del documento, que sigue a esta primera página, puede tener cualquier extensión para informar sobre la solución.

Los y las participantes pueden usar libros, blogs, computadores, internet, programas computacionales, pero no pueden consultar o interactuar con ninguna otra persona durante la solución. Ninguna contribución puede ser hecha por otra persona que no sea la persona que envía la solución.

Aunque los problemas estarán destinados a un análisis teórico, los participantes pueden realizar experimentos relevantes y presentar los datos resultantes en su trabajo si lo desean.

En caso de que se utilicen, cada solución debe incluir una lista de todas las referencias.

Las soluciones pueden usar algoritmos y herramientas computacionales existentes (que incluyen no solo herramientas disponibles gratuitamente, sino también herramientas dentro de sistemas como Matlab o Mathematica), siempre que se mencionen y citen correctamente y los métodos se expliquen claramente en la solución del problema. Cualquier código de programación, si se escribió uno, debe incluirse como un apéndice de la solución. Sin embargo, todos los algoritmos, métodos y resultados deben explicarse en el texto principal del documento para recibir consideración durante la evaluación.

Las soluciones enviadas pueden incluir ecuaciones, gráficos, figuras y tablas. Cada solución debe incluir como mínimo:

- (1) Una corta introducción del problema, tal como lo interpretó la persona participante.
- (2) Una explicación de todas las suposiciones y aproximaciones realizadas.
- (3) Justificación de todo el trabajo realizado.
- (4) Una breve discusión de las fortalezas y debilidades del enfoque adoptado.

Envío de la solución:

Las soluciones pueden enviarse como archivos .pdf, .odf, .doc o docx. Cada participante debe enviar su solución por correo electrónico a paskin@konradlorenz.edu.co y los documentos deben recibirse antes de que finalice el concurso. Si la solución no se recibe por correo electrónico durante la duración del concurso, la solución no será considerada. El documento completo debe incluirse como un archivo adjunto al correo electrónico. No envíe un enlace al documento en un servicio en la nube como Google Docs, Dropbox, etc. Una vez recibida la solución se le notificará la recepción en un plazo menor a cinco días hábiles. Si Ud. no recibe confirmación, comuníquese con el editor de la revista.

Resultados:

Toda solución recibida se irá evaluando en orden de llegada hasta la finalización del concurso. Cuando una solución sea correcta, la o el participante será invitada o invitado a exponer y justificar de manera verbal su solución de manera remota sincrónica utilizando alguna plataforma virtual como Teams, Zoom o Google Meets.

Premiación:

- La primera solución correcta será publicada en una siguiente edición del Paskín. Será una versión simplificada de la solución realizada en colaboración con el comité editorial, que incluirá una corta reseña de la persona ganadora.

- Certificado. Cada persona que participe y presente una solución correcta recibirá un certificado. El certificado se enviará por correo electrónico a la dirección utilizada para el envío de la solución. Espere varias semanas después de enviar su solución para recibir su certificado.

- La persona que envíe la primera solución correcta recibirá un bono virtual de regalo por un valor de **500.000 COP** (quinientos mil pesos colombianos.). La persona ganadora puede escoger el establecimiento comercial que desee, siempre y cuando ofrezca bonos electrónicos y el comité editorial pueda adquirirlos.

Política Editorial

El Paskín Matemático es una producción del Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Está abierto a todos y todas. Si tienes interés en escribir un artículo con cualquier tipo de contenido matemático, reseñar a un personaje, comentar un problema o tienes comentarios sobre nuestra publicación, envía un mensaje a paskin@konradlorenz.edu.co

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots$$

El Programa de Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz fue creado en 1998. Conoce más acerca de nuestro programa en nuestra página institucional

<https://www.konradlorenz.edu.co/programas/matematicas/>

Bogotá, Colombia. 2023

PASKÍN MATEMÁTICO

Volumen 5, No. 2, 2023

Contenido

- Juan Pablo Hernández Rodas
El problema de las ocho reinas 1
- Reynaldo Castaneira Ramírez
¿Cicloide, braquistócrona o tautócrona? 7
- César Augusto Lara Santana
Ventajas y desventajas de utilizar los modelos de función de transferencia 14
- Walter Garzón Gutiérrez
Representación gráfica y algebraica de las ecuaciones lineales y sus propiedades en el *sistema seno* 21
- Blanca Margarita Parra Mosqueda
Obstáculos en la concepción de los números negativos y de sus logaritmos 33
- Leidy Catherine Sánchez Ascanio
MateKuento 39
- John A. Arredondo y Alejandro Cárdenas
Paskín Challenge 42

En muchas ocasiones la línea más corta entre dos verdades del dominio real pasa a través del dominio complejo.

Jacques Hadamard



KONRAD
LORENZ
FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\xi x} dx$$

$$\sin \frac{3}{4}$$

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$