Una muy breve introducción a los sistemas dinámicos continuos

John Alexander Arredondo
alexander.arredondo@konradlorenz.edu.co

21 de octubre de 2015

En términos históricos, podemos pensar en los sistemas dinámicos como una rama de las matemáticas fundada por Henry Poincaré (1854 - 1912), quien en sus estudios de las órbitas periódicas para problemas de tres cuerpos, concibió un brillante conjunto de herramientas que hoy conocemos como teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales [4].

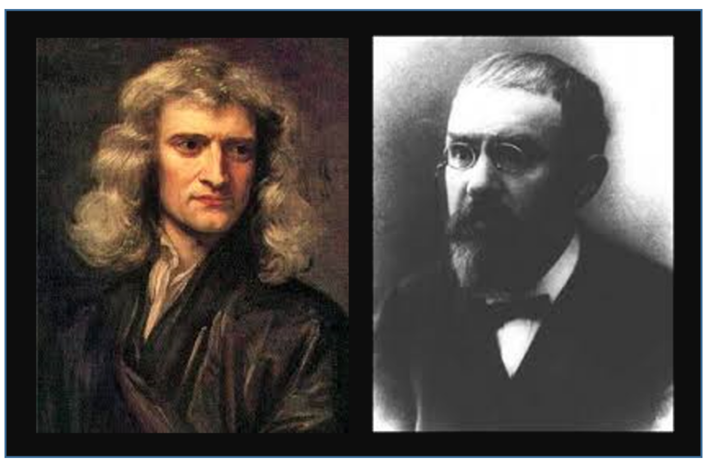

Figura 1: *Isaac Newton nos brindó los primeros ejemplos de sistemas dinámicos, tan pronto su cálculo diferencial vio la luz. Algo simple como un cuerpo en caída libre o algo intrincado como el movimiento de un cometa se pueden describir con las ecuaciones que nos dejó como legado. Unas ecuaciones tan complicadas de resolver, que Henry Poincaré tuvo que desarrollar toda una nueva rama de las matemáticas tan sólo para atacar uno de los problemas del marco newtoniano. (Imagen tomada de Wikimedia commons)*

En este contexto, Poincaré concebía un sistema dinámico como un campo de vectores en el espacio fase y una solución como una curva tangente en cada punto a los vectores de dicho campo. Por su dedicación a los problemas de la mecánica celeste, su mayor interés fue la descripción del retrato fase, es decir, de todo el conjunto de soluciones, así como de la estabilidad de las soluciones, que para él consistían en el análisis cualitativo de los resultados.

Hoy, más de cien años después de la muerte de Poincaré, los sistemas dinámicos son una de las ramas de mayor actividad en el mundo de las matemáticas. Por sus diferentes caminos han desfilado nombres como Arnold, Andronov, Birkhoff, Kolmogorov, Liapunov, Lorenz, Moser o Smale, por mencionar sólo algunos de los ilustres matemáticos que han nutrido con inmortales resultados a los sistemas dinámicos. Los cuales, hoy en día, explican un gran número de fenómenos en diversas áreas del conocimiento, y desde luego, un gran número de problemas matemáticos. Para darnos una idea, con un sistema dinámico se puede explicar desde el movimiento de un péndulo simple hasta el movimiento planetario. Además de la amplia cobertura fenomenológica, aquellas primeras herramientas desarrolladas por Poincaré, hoy se han multiplicado, tanto que para nombrar algunas, tendríamos que ver con lupa un problema particular. Basta con mencionar que los sistemas dinámicos se nutren de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, geometría, topología, análisis, computación, probabilidad, etc. . . .

En términos modernos, un sistema dinámico es una cuarteta $\{T, X, A, S\}$ [6], donde T representa el conjunto sobre el que se mide el tiempo, X es un espacio métrico que representa los diferentes estados o movimientos del sistema, el espacio fase de Poincaré, A es un subconjunto de X que contiene el conjunto de condiciones iniciales y S representa el conjunto de posibles movimientos. Esta definición permite visualizar la clasificación estándar de los sistemas dinámicos. Estos son continuos cuando T está en los reales positivos y discretos cuando T está en los naturales. Si la dimensión de X es finita, entonces el sistema dinámico es finito dimensional y si los cambios en el sistema son independientes de la variable en T, entonces los sistemas dinámicos son autónomos y de lo contrario no autónomos.

Para sentar ideas, podemos pensar un sistema dinámico como un modelo representado por un conjunto de ecuaciones donde unas cantidades varían respecto a otras, generalmente (al menos así para sistemas continuos) un sistema de ecuaciones diferenciales. No sería justo si no iniciamos mencionando los sistemas dinámicos más sencillos, los sistemas lineales, representados como

$$\frac{d}{dt}X = AX, \tag{1}$$

donde $X \in R$ es un vector y $A \in M_{n\times n}$ es una matriz cuadrada. La magia de estos sistemas es que todos ellos son solubles [3], de hecho, solubles con aplicaciones de álgebra lineal. Las propiedades de la matriz A, proporcionan los diferentes comportamientos de estos sistemas, que se ven reflejados en su retrato fase. Desafortunadamente, los fenómenos observables que se rigen por un sistema lineal son prácticamente inexistentes. Sin embargo, el correcto entendimiento de ellos es la base para desarrollar la teoría que permita abordar sistemas más complejos.

Hagamos, entonces, un breve recorrido por algunos de los ejemplos clásicos no lineales en la teoría de sistemas dinámicos. Empecemos por aquellos que hemos denominado continuos. En este caso, tal vez el ejemplo más conocido e importante es el péndulo. Se dice que Galileo Galilei (1554–1642) fue el primero en realizar un estudio riguroso de este objeto.

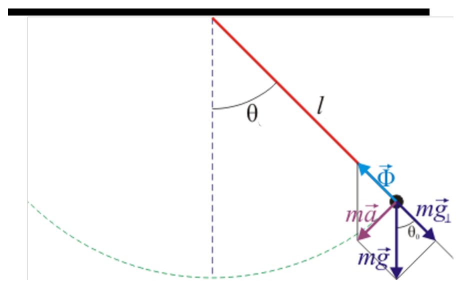

Figura 2: *El péndulo consiste de una masa m que cuelga de una cuerda inextensible de longitud l, de tal manera que las únicas fuerzas que actúan sobre la masa son su peso, la fricción del aire y la tensión de la cuerda.*

El sistema dinámico asociado al péndulo corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden dada por la segunda ley de Newton [9]

$$ml\frac{d^2}{dt^2}\theta + bl\frac{d}{dt}\theta + mg\,\mathrm{sen}\,\theta = 0, \tag{2}$$

cuando el coeficiente de fricción $b = 0$, se tiene el caso más sencillo conocido como péndulo simple. Aun así, su solución no es trivial, y usualmente se hace la aproximación $\mathrm{sen}\,\theta = \theta$ (el rango de aplicabilidad de esta aproximación no esta más allá de $\theta = 10°$) para integrar la ecuación diferencial por métodos conocidos.

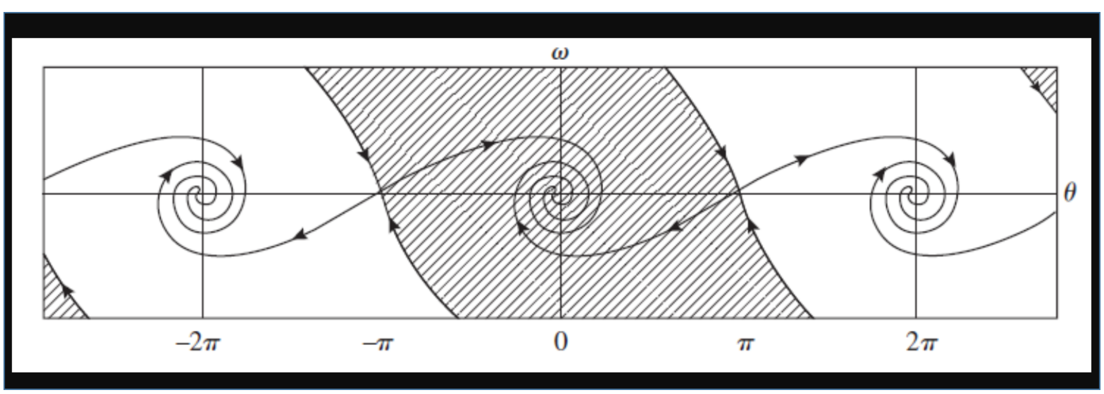

Figura 3: *El retrato fase del péndulo no lineal consiste de puntos de equilibrio estables e inestables que se alternan; el estable corresponde al péndulo en reposo $\theta = 0$ y el inestable al péndulo invertido $\theta = \pi$. Topológicamente las trayectorias están contenidas en un cilindro.*

Afrontar la solución de la expresión (2), requiere recurrir a series de potencia de tipo Fourier o Bessel, convirtiendo el estudio del péndulo en un seminario donde concurren varios resultados importantes de las matemáticas de los últimos 300 años. El péndulo por sí mismo merece un libro aparte, por esto recomendamos fuertemente al lector la consulta de [2].

De un modelo que, entre otras, describe un juego de parque, pasemos a uno que describe el comportamiento de la atmósfera en nuestro planeta y que muchos asocian desde el siglo pasado con uno de los más fascinantes fenómenos asociados a los sistemas dinámicos, el caos. Este modelo conocido como el atractor de Lorenz, en honor de Edward Lorenz (1917-2008), corresponde al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x' &= \sigma(y-x), \qquad (3)\\ y' &= rx - y - xz,\\ z' &= xy - bz, \end{aligned}$$

donde σ, r y b son parámetros reales, los dos primeros, correspondientes a los números de Prandtl y Rayleigh. Si bien el modelo surge como un esfuerzo impresionante por simplificar los ya conocidos para predecir el clima y otros fenómenos atmosféricos, el mayor impacto fueron las conclusiones de Lorenz cuando trató de analizar numéricamente el comportamiento de este sistema.

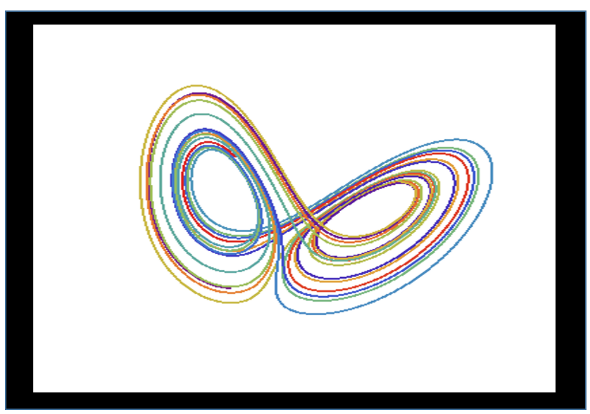

Figura 4: *El célebre retrato fase del atractor de Lorenz parece una mariposa, en cuyas alas reposan los puntos fijos atractores del sistema. Las órbitas viajan de un ala a la otra caóticamente.*

Para sorpresa de Lorenz, cuando variaba las condiciones iniciales en rangos muy pequeños para simular las trayectorias, el resultado eran retratos fase dramáticamente distintos, algo completamente inesperado para un sistema relativamente simple. La susceptibilidad de este sistema a cambios en el conjunto de condiciones iniciales es la definición más simple de lo que hoy llamamos caos. Para su entendimiento, se han desarrollado grandes herramientas como la dinámica simbólica, la teoría de bifurcaciones y la teoría del caos en sí. La intrincada belleza que describen las trayectorias del atractor de Lorenz para varios parámetros, que asemejan una mariposa, y su característica susceptibilidad asociada con el caos, se acuñaron bajo el slogan *el efecto mariposa*, ya que en teoría, *el aleteo de una mariposa en Japón, puede producir un huracán en Hawai.* El descubrimiento de este comportamiento, que está ligado a la aparición de los primeros computadores prácticos, ha llevado a muchos a considerar a Lorenz como el padre del caos, algo erróneo a gusto del autor, ya que el mismo Poincaré había anticipado este comportamiento para el problema de tres cuerpos, siendo él, el verdadero padre del caos. Algo irrelevante, ya que el trabajo de Lorenz por sí mismo ha tenido un fuerte impacto en la ciencia, lo cual le valió finalizar sus días como profesor hemérito en MIT.

Como ejemplo final, no podríamos dejar de mencionar la aplicación más celebre a los sistemas dinámicos que nos dejó el padre el cálculo, sir Isaac Newton (1642-1727), el problema de los n-cuerpos en mecánica celeste. Este problema consiste en considerar n objetos con coordenadas de posición r, en el espacio tridimensional, de tal manera que si la única propiedad física que poseen estos objetos es masa, y además, son perfectamente esféricos, su comportamiento estará regido por dos importantes leyes físicas: la segunda ley de Newton o ley de movimiento, que en su forma más simple se expresa como $F = ma$, y la ley de atracción universal de Newton. Matemáticamente, esto es equivalente al siguiente conjunto de n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo grado

$$m_i \ddot{r}_i = \sum_{i=1}^{n} G \frac{m_i m_j}{|r_i - r_j|^3}(r_i - r_j). \tag{4}$$

La solución al problema de los n-cuerpos será por lo tanto, un conjunto de n funciones que determinarán la posición y la velocidad de cada cuerpo en cualquier instante de tiempo. Lo que es equivalente a que apartir de conocer la posición y la velocidad inicial en algún instante de tiempo, para cada uno de los n cuerpos, se conocerá la dinámica de todo el sistema, tanto en el futuro como en el pasado.

El caso más sencillo de un problema de n-cuerpos se presenta cuando $n = 1$, que es conocido como el problema de Kepler, en honor de Johannes Kepler, quien fue uno de los pioneros en el estudio del movimiento de los planetas. La idea en este caso es que un objeto de masa m es atraído gravitacionalmente por otro con una masa M muchísimo más grande, es decir $M >> m$, y lo que se quiere saber es cuál será el movimiento del objeto más pequeño bajo la influencia del más grande. En este caso la ecuación correspondiente se puede resolver analíticamente, y la solución corresponde a una cónica, que usualmente se escribe en coordenadas polares y tiene la forma

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}. \tag{5}$$

En esta expresión, p se conoce como parámetro de la cónica y e como excentricidad, ambas cantidades están relacionadas con dos cantidades físicas muy importantes,

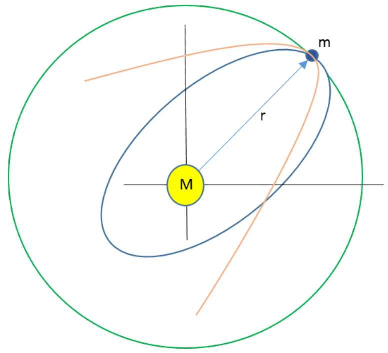

Figura 5: *En el problema de Kepler, la trayectoria de la masa m corresponde a algún tipo de cónica, dependiendo del valor de su energía y su momento angular.*

la energía y el momento angular; así, de acuerdo a los valores de estas cantidades, se obtendrá que la dinámica que rige el comportamiento del objeto de masa m será un movimiento en el que describe una trayectoría sobre un circulo, una elipse, una parabóla, una hiperbóla o una recta, mientras la masa grande M permanece en uno de los focos de la cónica (Figura 5).

El siguiente problema en grado de dificultad se da para $n = 2$, que es conocido como el problema de los dos cuerpos. En este caso no se considera que hay una gran diferencia entre las masas de los dos objetos, de tal manera que se considera que el centro de masa de los dos objetos está en el origen del sistema de coordenadas. La solución en este caso también es una cónica, pero la diferencia respecto al problema de Kepler es que ahora cada objeto se mueve en su propia trayectoría cónica (Figura 6).

Figura 6: *En el problema de dos cuerpos, cada una de las masas describe una cónica y el centro de masa de los dos cuerpos está en el origen.*

Si seguimos esta secuencia para atacar problemas, el siguiente sería el caso $n = 3$, pero para este caso ya no se conoce un método que permita llegar a un conjunto de funciones que den solución al problema, de hecho, encontrar soluciones explícitas para $n \geq 3$ es un problema abierto [7]. A partir de este caso, la búsqueda de este tipo de soluciones está restringida a soluciones particulares, con simetrías especiales, como los equilibrios relativos y más en general, las soluciones homográficas.

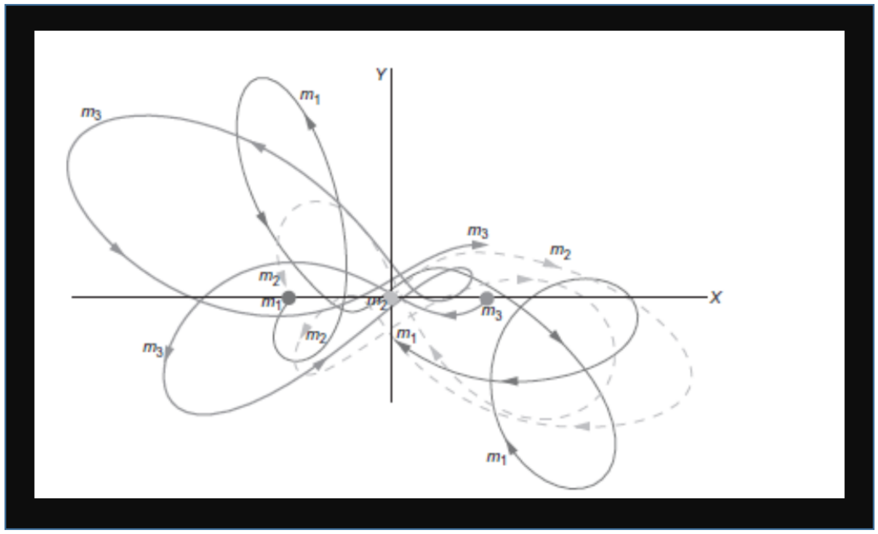

Figura 7: *En el problema de tres cuerpos, los conjuntos de condiciones iniciales que permiten encontrar soluciones periódicas son bastante escasos, en general el sistema es caótico.*

Como hemos visto hasta este punto a través de tres ejemplos, los sistemas dinámicos continuos permiten la descripción de fenómenos muy simples o extremadamente complicados. Siendo en ambos casos, el objetivo final la completa descripción del fenómeno en cuestión, una tarea extremadamente difícil, de hecho, en la mayoría de los casos, imposible hasta nuestros días. Lo cual, para nuestra fortuna, nos garantiza la oportunidad de atacar una diversidad de problemas abiertos, con diversas herramientas matemáticas existentes y con la necesidad de la creación de muchas más nuevas que den luz en este campo. Como comentario final, para realzar aún más la importancia de los sistemas dinámicos, recordemos la lista de problemas matemáticos más importante para este siglo, conocida como los problemas de Smale [9]. En esta lista el sexto y décimocuarto problema dicen lo siguiente:

- Finitud del número de equilibrios relativos: dados los números reales positivos $m_1, ..., m_n$ que representan las masas en el problema de los n-cuerpos, ¿es finito el número de equilibrios relativos?.
- Es la dinámica del atractor de Lorenz, la dada geométricamente por el atractor de Lorenz, Williams, Guckenheimer y Yorke?

Los dos están intrínsecamente relacionados con los ejemplos que hemos dado, el sexto problema sólo se ha demostrado hasta $n = 5$ [1] y el segundo fue resuelto en 2002 por Tucker [10], además, al menos otros tres problemas en la lista, que siguen sin respuesta, están relacionados con los sistemas dinámicos. El lector, ya podrá identificar, cuáles son...

Referencias

[1] Albouy A, Kaloshin V., *Finiteness of central configurations of five bodies in the plane.* Ann. of Math. (2) **176**, no. 1, 535-588, 2012.

[2] Baker G., Blackburn J., *The Pendulum, a case study in physics.* Oxford University Press, 2005.

[3] Hirsch M., Smale S., Devaney R., *Differential Equations, dynamical systems, and Introduction to chaos*, Elsevier

[4] Lacomba E., *los sistemas dinámicos, que son y para que sirven*, miscelaneas matematicas 32, 2000.

[5] Meyer K., Hall G., *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the n-body Problem*, Springer-Verlag. New York, (2007).

[6] Michel A., Ling H., Liu D., *Stability of Dynamical Systems Second edition*, Birkhauser, (2015).

[7] Perez-Chavela E., *Sobre la profesión más Antigua del Mundo*, Carta Informativa SMM, 2008

[8] Poincare, H., *Les methodes nouvelles de la mecanique celeste Tome I- III*, Gauthier-Villars (1899)

[9] Smale, S., *Mathematical problems for the next century, in Mathematics: Frontiers and Per-spectives*, ed. V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, and B. Mazur, American Math. Soc., 271-294, (2000).

[10] Tucker, S.,*A Rigorous ODE Solver and Smale's 14th Problem*, Foundations of Computational Mathematics 2, (2002).