DESARROLLO DEL CONCEPTO DE LA DERIVADA SIN LA NOCIÓN DEL LÍMITE

Yeimy Alexandra Lozano Robayo

yeimyalexa@yahoo.com

Trabajo de Grado para Optar por el Título de Matemático

Directora: Jenny Carvajal Caminos

Matemática Universidad Nacional de Colombia

Fundación Universitaria Konrad Lorenz

Facultad de Matemáticas e Ingenierías

Bogotá·, julio de 2011

Índice General.

INTRODUCCIÓN.

El cálculo, es posiblemente, el área de las matemáticas de mayor énfasis en los currículos de distintas carreras universitarias. Este hecho puede explicarse por su funcionalidad al modelar y optimizar diferentes procesos físicos. Por ejemplo: la velocidad de una partícula con movimiento rectilíneo se puede modelar a partir del concepto de derivada como tasa de cambio de desplazamiento con respecto al tiempo y la aceleración instantánea es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, por lo tanto la aceleración es la derivada segunda del desplazamiento con respecto al tiempo.

El análisis del proceso de construcción del concepto de la derivada, remite a resolver el problema histórico de hallar la tangente a una curva, en un punto dado. Como referente se toman los trabajos de Fermat, Newton y Leibniz. Fermat obtuvo un método para hallar la tangente a una curva definida por un polinomio apoyándose en el siguiente razonamiento: si $f(x)$ es un polinomio, entonces $f(x+h) - f(x)$ es un polinomio en h divisible por h. Newton introdujo el concepto de las fluxiones lo que hoy se conoce como derivadas imponiendo así su punto de vista físico para obtener la recta tangente a una curva como el cociente entre las fluxiones. Mientras Leibniz interpreto la tangente a una curva como en cociente de los infinitésimos $\frac{dy}{dx}$.

Es así que el aprendizaje del cálculo y en particular, la conceptualización de la noción de derivada, constituye uno de los mayores desafíos de la educación actual, ya que trae consigo numerosas dificultades relacionadas con un pensamiento numérico - abstracto. Artigue (1995) expresa que si bien muchos estudiantes pueden aprender a realizar de forma mecánica cálculos de derivadas, primitivas y resolver algunos problemas, se encuentran grandes dificultades para alcanzar una verdadera comprensión de los conceptos.

El propósito del proyecto es describir los fundamentos del desarrollo de la derivada sin la noción del límite y plantear una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada a partir del cociente de incrementos, dirigida a estudiantes de último año de secundaria y/o primeros semestres de educación superior con la cual se busca la apropiación y aplicación del concepto de la derivada en diversos contextos.

1. ANTECEDENTES.

A través de la historia se reconoce que a finales del siglo XVII y principios del XVIII se dio origen al cálculo diferencial a partir de algunos problemas , por ejemplo, el trazado de la tangente a una curva y las condiciones para obtener máximos y mínimos, la velocidad de los cuerpos en movimiento entre otros.

Los primeros matemáticos que abordaron estos problemas fueron Fermat (1601 - 1665) y Descartes (1596 – 1650), quienes crearon procesos para la construcción de las tangentes a una curva en un punto dado.

Newton (1642 – 1727) y Leibniz (1646 – 1716) quienes desarrollaron procedimientos para abordar los problemas enunciados.

Bolzano (1817) fue quien definió por primera vez la derivada como un límite y poco tiempo después Cauchy describió la derivada en su *libro Resumé des leçons sur le calcul infinitesimal (1823) Tercera Lección,* a partir de los aportes de Bolzano.

En cuanto a las investigaciones didácticas realizadas en la actualidad se pueden nombrar:

Historia y epistemología de la función derivada *"como objeto del cálculo diferencial dan cuenta de la complejidad y de los vaivenes que en veinte siglos ha sufrido ésta, hasta adquirir el estatus de función derivada. El trabajo de cientos de seres humanos dedicados a su estudio, en distintas épocas y culturas, han hecho aportes que han permitido los cambios y el refinamiento de las ideas matemáticas de la función derivada para convertirla en un objeto (puro, aplicado y a enseñar), muy potente. Es tal la importancia de este objeto matemático que permite resolver problemas de las matemáticas, de las ciencias naturales, sociales y humanas." [1]*

Descripción de niveles de comprensión del concepto derivada *"Este artículo presenta un estudio de caso que describe los niveles de comprensión del concepto derivada de seis estudiantes que cursaron cálculo diferencial en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. El marco teórico utilizado se concentra en el desarrollo del esquema de derivada a través de tres niveles: Intra, Inter, Trans (Piaget y García, 1989). Se encontró una tendencia en algunos a interpretar la derivada en términos del proceso algorítmico y también como dependencia de la expresión algebraica de la función. Por otra parte, se hicieron evidentes las dificultades para transitar de la gráfica de la función hacia la gráfica de la función derivada."* [2]

Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada *"Este proyecto se inscribe en la línea marcada por los Doctores E. Wenzelburger y R. Cantoral. El problema que motiva esta investigación radica en que, con los cursos tradicionales de Cálculo Diferencial en el preuniversitario, cantidades significativas de estudiantes no logran comprender sus conceptos básicos, en especial el concepto de derivada. El proyecto tiene como objetivo el de elaborar una Propuesta Didáctica que contribuya a la comprensión del concepto de derivada a través de la formación de ideas variacionales, particularmente a través de la noción de rapidez de la variación"* [3]

La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *"este trabajo revisa y organiza las aportaciones de las investigaciones hechas en Matemática Educativa para identificar el conocimiento generado La revisión se ha estructurado considerando: a) lo que se conoce sobre la comprensión de la derivada de una función en un punto; b) el papel que desempeñan los sistemas de representación; c) las características del desarrollo del esquema de derivada. Por último, se identifican líneas de investigación necesarias para aumentar nuestra comprensión de cómo los estudiantes dotan de significado y usan el concepto de derivada"* [4]

2. JUSTIFICACIÓN.

La invención de la matemática ha estado, desde sus inicios, íntimamente ligada al desarrollo del Cálculo infinitesimal. Hoy en día, se puede afirmar que casi todas las manifestaciones del universo se pueden modelar. Es por esta razón que una de las metas que se debe proponer en la educación matemática es la de desarrollar en los estudiantes las competencias necesarias para "*entender y controlar el mundo cambiante en que vivimos*" como lo afirma Stewart por consiguiente el reto que se plantea en este proyecto es la apropiación del concepto de derivada y su aplicación en la cotidianidad. Pero la enseñanza de este concepto no puede seguir siendo aquella que se reduce a la presentación formal a partir de la definición del límite, pues investigaciones en educación matemática ha demostrado que las posibilidades de su comprensión reposan sobre nociones e ideas básicas como la de infinito, procesos infinitos, aproximación y variación.

Desde el aspecto educativo se puede afirmar que la enseñanza del cálculo se ha convertido en uno de los problemas más transcendentes en la educación, ya que presenta varias dificultades referidas a:

- la concepción sobre la matemáticas del Cálculo, la mayoría de las veces esta concepción está inscrita en la tradición axiomática - deductiva prevaleciendo las representaciones formales.
- Convertir sus conceptos básicos, límite y derivada, en un conocimiento algorítmico desde lo algebraico.

Pero tal como lo muestra Cornu (1995) en los resultados de sus investigaciones didácticas los estudiantes desarrollan dificultades fuertes y resistentes a la apropiación y manipulación del concepto de límite y derivada; entendiendo estas dificultades como obstáculos epistemológicos como los denomina Bachelard. Para este filósofo, "*el conocimiento científico no se desarrolla en un proceso continuo, ni lineal, es el resultado del rechazo de formas previas de conocimiento que se constituyen en obstáculos epistemológicos*".

Por todo lo anterior, se plantea como propósito el describir los fundamentos del desarrollo de la derivada sin la noción del límite y plantear una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada a partir del cociente de incrementos; con el fin de vencer los obstáculos epistemológicos que se presentan en el aprendizaje del concepto apropiándose así de un nuevo conocimiento.

3. MARCO DE REFERENCIA.

"Primero, la derivada fue usada,
después descubierta,
explorada y desarrollada y,
finalmente definida"
Judith V. Grabiner historiadora de las matemáticas

3.1. ALGO DE HISTORIA "LA DERIVADA".

Los grandes creadores del Cálculo diferencial fueron el inglés Isaac Newton[1] (1642 - 1727) y el alemán Goottfried Leibniz[2] (1646 - 1 716) grandes científicos de los siglos XVII y XVIII los cuales sistematizaron y generalizaron ideas previas para la construcción del cálculo. Ideas abordadas desde la antigüedad por grandes personajes como: Johannes Kepler[3] (1571 - 1630), René Descartes (1596 -1650), Pierre de Fermat[4] (1601 – 1665), Galileo Galilei (1564 – 1642).

---

[1] *Isaac Newton matemático, físico y astrónomo ingles, nacido en Woolsthorpe el día de navidad de 1642 y muerto en Londres el 1727. Se inmortalizó por el descubrimiento de las leyes de la mecánica y la gravitación universal, su explicación de la descomposición de la luz en los diferentes colores, y por sus nobles trabajos relativos al álgebra y la geometría, así como la invención del cálculo diferencial.*

[2] *Goottfried Leibniz, fue un filósofo, matemático, jurista, bibliotecario y político alemán. Fue uno de los grandes pensadores de los siglos XVII y XVIII, y se le reconoce como "El último genio universal". Inventó el cálculo infinitesimal, independientemente de Newton, y su notación es la que se emplea desde entonces.*

[3] *Johannes Kepler figura clave en la revolución científica, astrónomo y matemático alemán; fundamentalmente conocido por sus leyes sobre el movimiento de los planetas en su órbita alrededor del Sol.*

[4] *Pierre de Fermat fue un jurista y matemático francés apodado por Eric Temple Bell con el sobrenombre de "príncipe de los aficionados"*

Ángel Ruiz plantea en su libro "*Historia y filosofía de las matemáticas*" que Fueron cuatro problemas los que motivaron la creación del cálculo: [5]

El primer problema fue la determinación de la velocidad y la aceleración de un cuerpo si se conoce la distancia en función del tiempo. El segundo fue el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes determinados por curvas o superficies. El tercero fue determinar cuándo una función alcanza un valor máximo o mínimo y el último problema estaba asociado a la geometría y era como calcular las rectas tangentes o normales a una curva en un punto.

Newton y Leibniz demostraron que con métodos infinitesimales se resolvían los anteriores problemas planteados.

Fermat (1601 - 1665) en el año 1638 presentó un método para encontrar máximos y mínimos en una ecuación algebraica la cual fue generalizada años después por el Holandés Johannes Hudde.

También Fermat descubrió un método para calcular la pendiente de una recta tangente a una curva algebraica "antecedente del concepto de la derivada".
Método que se puede reducir al cálculo del siguiente límite.

$$\lim_{E\to 0}\frac{f(x+E)-\ f(x)}{E}$$

Aproximación similar a la que Newton y Leibniz desarrollaron posteriormente.

Newton descubrió y construyo el cálculo diferencial e integral en los años 1665 a 1666 publicando sus resultados en sus libros *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* publicado en 1711, *Methodus fluxionum et serierum infinitorum plublicado* en ingles en 1736 y en latín en 1742 dándole a su cálculo el nombre de *Teoría de fluxiones* a las funciones x, y, z eran *fluentes* y las derivadas las llamaba *fluxiones* denotándolas: $\dot{x}$, $\dot{y}, \dot{z}\ldots.$

Los infinitesimales los llamaba Momentos de fluxiones y los denotaba: $\dot{x}0, \dot{y}0, \dot{z}0\ldots.$ Donde "0" es una cantidad infinitamente pequeña.

Newton señalaba "*Cantidades y razón de cantidad, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finamente iguales"*, considerando el límite de una función o "el de la derivada" en su libro *Philosophie naturalis principia mathematica (1687) , lema I del libro I, sección I .*

Leibniz bajo la influencia de Huygens, le dio importancia al cálculo de las tangentes a las curvas estando seguro que se trataba de un método inverso al de encontrar áreas y volúmenes a través de sumas. En 1676 Leibniz ofreció las reglas $dx^n = nx^{n-1}$ para un entero o fraccional. En julio de 1677 Leibniz ofreció las reglas correctas para la diferencial de la suma, diferencia, producto y cociente dos funciones.

Su método se recoge por primera vez en un artículo publicado en la revista *Acta eruditorum* en 1684 enunciándolo como"*Un nuevo método para máximos y mínimos y también tangentes, que no se ven obstruido por las cantidades fraccionarias ni por los irracionales*". Método que se trataba de una aproximación geométrica y no cinemática como en Newton. El artículo contenía los símbolos $dx\,, dy$ que representaban para

Leibniz cantidades arbitrariamente pequeñas (diferenciales o infinitesimales) con las cuales construyo su cálculo diferencial “calculo de tangentes” y las reglas:

$$d(xy) = x\,dy + ydx$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - x\,dy}{y^2}$$

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx$$

Y señalaba que, $dy = 0$ para valores extremos relativos o, $d^2y = 0$ para los puntos de inflexión. Introduciendo el termino de “calculo diferencial” (de diferencias) pero antes había usado la expresión “*methodus tengentium directa*”.

En el siglo XIX la función derivada logra su reconocimiento social, científico y matemático con mayor rigor a partir de Niels Abel (1802 – 1829), Bernhard Bolzano (1781 -1848), Augustin Cauchy (1789 -1857), Karl Weierstrass (1815 – 1897) entre los más reconocidos.

Bolzano (1817) quien definió por primera vez la derivada como un límite: la cantidad $f(x)$ a la que la razón

$$\frac{f(x + \nabla x) - f(x)}{\nabla x}$$

Se aproxima indefinidamente cuando ∇x se acerca a 0 a través de valores positivos y negativos.

Cauchy describió la derivada en su *libro Resumé des leçons sur le calcul infinitesimal (1823) Tercera Lección "cuando la función* $y = f(x)$ *es continua entre dos limites dados de la variable x, y se asigna a esta variable un valor comprendido entre dichos limites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce un incremento infinitamente pequeño de la función. Por consiguiente si* $\nabla x = i$, *entonces los dos términos de la razón entre las diferencias serán dos cantidades infinitamente pequeñas. Sin embargo, mientras estos dos términos se aproximan indefinidamente y simultáneamente al límite cero, la razón podrá converger a otro limite positivo o negativo. Este límite:*

$$\frac{\nabla y}{\nabla x} = \frac{f(x+\ i) - \ f(x)}{i}$$

Si existe, tiene un valor determinado para cada valor particular de x. Así por ejemplo si se toma $f(x) = x^m$. *Siendo m un número entero, entonces la razón entre las diferencias infinitamente pequeña será:*

$$\frac{f(x+\ i) - \ f(x)}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\ \cdot 2}x^{m-2}i + \cdots + \ i^{m-1}$$

Que tendrá por límite la cantidad mx^{m-1}, *es decir una nueva función de la variable x llamada función derivada y se designa por la notación* y' *o* $f'(x)$ *"*

3.2. PRIMEROS ANTECEDENTES SOBRE LO INFINITAMENTE PEQUEÑO

El tratamiento del infinito representó para los griegos uno de los mayores problemas trascendentes no solo por las implicaciones en sus matemáticas sino por la relación que tenía el concepto con las concepciones ideológicas.

Pitágoras de Samos (580? – 500? A.C) fue uno de los primeros en definir lo infinito afirmando "*La evolución es la ley de la vida. El número es la ley del universo. La unidad es la ley de Dios*" amarrando el infinito a la divinidad. [6]

Aunque fueron los pitagóricos los primeros en trabajar con el infinito fue Aristóteles el primer teórico del infinito potencial quien lo consideraba como "lo *que no se deja recorrer y carece de límite*"

Años después las teorías matemáticas que permiten manejar el infinito como cantidad es decir; lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande han tenido una larga historia que aun no termina y que actualmente se conoce como "*Matemática no estándar*" por un lado y por otro como "*Geometría Diferencial Sintética"*. Estas teorías iniciaron con Demócrito y Arquímedes quienes afirmaron que la línea estaba constituida por segmentos de longitud infinitamente pequeña. Por ejemplo una circunferencia es un polígono regular cuyos lados son infinitesimales o infinitésimos.

En la edad media Bertrand Rusell citado por F Cajori en *History of mathematics* 1980 sostenía "*A lo largo de toda la Edad Media, casi todos los mejores intelectos se dedicaron a la lógica formal mientras que en el siglo XIX solo una parte infinitesimal del pensamiento de todo el mundo se dedico a este tema, sin embargo se ha hecho más por su* *avance en cada una de las décadas que ha seguido a 1850 de lo que se hizo en el periodo que va desde Aristóteles a Leibniz* ” [6]

Leibniz consideraba los infinitesimales positivos como números que son mayores que cero, pero menores de todos los reales positivos. Para él los infinitesimales son “*incomparables*” porque con respecto a las cantidades finitas son “*como granos de arena con relación al mar”*. También creía que las líneas rectas y las curvas eran polígonos con infinito número de lados “*Polígonos infiniláteros*”, que las superficies curvas, poliedros de infinitas caras, que el movimiento variado era una sucesión de movimientos uniformes, entre otros ejemplos; de tal forma que las cantidades quedaban descompuestas en elementos más sencillos y por lo tanto más fáciles de captar. [6]

Las ideas de Leibniz sobre las cantidades infinitesimales fueron acogidas por los matemáticos continentales pero no en la misma forma. El Marques de L’ Hopital (1661 – 1704), autor del primer texto de cálculo “análisis *de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*” (1696) establece lo siguiente *“ se pide que se puedan tomar indistintamente una por otra a dos cantidades que no difieran entre sí más que por una cantidad infinitamente pequeña o (lo cual es lo mismo) que una cantidad que no se incrementa ni se haga disminuir más que por otra cantidad infinitamente menor que ella, pueda considerarse como que permanece siendo la misma*” [6].

Louis Cauchy (1789 – 1857) en 1829 en su libro *Curso de Análisis* definió:

1. Una infinitesimal o cantidad infinitamente pequeña, como una variable con cero como límite: “*Se dice que una cantidad variable es infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente de tal forma que converge hacia el valor cero”*. [6]

2. El límite : “*cuando los sucesivos valores atribuidos a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo hasta acabar diferenciándose muy poco de él, haciéndose tan pequeña [la diferencia] como uno desee, este ultimo (valor fijo) es llamado el límite de todos los otros* ” [6]

Bernardo Bolzano (1781 – 1848) en su libro “*las paradojas del Infinito*” se atreve a sostener la existencia del infinito afirmando *“…además de Dios, existen seres creados por contraposición a él, llamados seres finitos, siendo posible demostrar a partir de ellos la existencia de algún tipo de infinito, porque en realidad el conjunto mismo de estos seres debe ser infinito, lo mismo que el conjunto de las condiciones que experimenta cada uno de ellos inclusive en el más pequeño de los intervalos de tiempo (que contiene ya un infinito de instantes), etc. Podemos concluir, entonces, que también en la esfera de la realidad es posible constatar la existencia de un infinito”*. [6]

3.3. DEFINICIÓN DE LA DERIVADA.

Se presentan a continuación distintas definiciones del concepto de derivada desde un enfoque clásico formal y didáctico.

3.3.1. Definición formal.

Si f está definida sobre un intervalo abierto (a, b), entonces para cada dos puntos distintos x y c de (a, b) podemos considerar el cociente de diferencias llamado cociente incremental.

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Definición 5.1 *Sea f una función real definida en un intervalo abierto* (a, b), *y supongamos que* $c \in (a, b)$. *Diremos que f es diferenciable en c siempre que el límite existe.* El limite, designado por $f^{'}(c)$ se llama derivada de f en c [1].

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Este método de calcular límites define una nueva función $f^{'}$, cuyo dominio está formado por aquellos puntos de (a, b) en los que $f^{'}$ se llama primera derivada de f. La $n - esima$ derivada de f designada por f^{n}," [7]

3.3.2. Definición de la derivada como una pendiente [6].

El método de Fermat para calcular la pendiente fue desarrollado durante 1630 y, aunque no es riguroso, es tan exacto como el utilizado posteriormente por Newton y Leibniz, **sin utilizar el concepto de límite**. Con una misteriosa e, Fermat desarrollo un método para hallar tangentes a curvas planas.

El siguiente ejemplo enseña el enfoque de Fermat.

Se desea encontrar la tangente a la parábola $y = x^2$ en algún punto (x, x^2). Sea $x + e$ un punto cercano a x sobre el eje X y sea s la subtangente a la curva en el punto (x, x^2) ver figura 1.

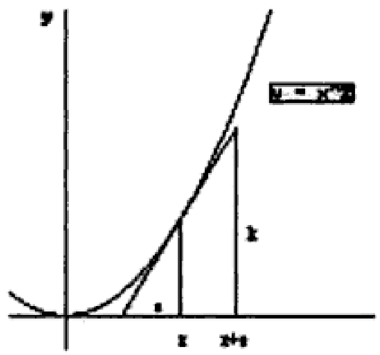


Figura 1. Representación grafica de la parábola $y = x^2$ *[6]*

Por semejanza de triángulos, se tiene que $\frac{x^2}{s} = \frac{k}{s+e}$. Fermat observa que k es aproximadamente igual a $(x+e)^2$. Luego se tiene:

$$\frac{x^2}{s} \simeq \frac{(x+e)^2}{s+e}$$

Resolviendo para s :

$$x^2 e \simeq 2xs + se^2$$

Luego,

$$s \simeq \frac{x^2 e}{2x + e^2} \simeq \frac{x^2}{2x + e}$$

Por lo tanto:

$$\frac{x^2}{s} \simeq 2x + e$$

Observe que $\frac{x^2}{s}$ es la pendiente de la tangente a la parábola en el punto (x, x^2).

Eliminando e se tiene que la pendiente de la tangente es $2x$.

El método de Fermat fue fuertemente criticado por sus contemporáneos. Ellos objetaban sobre la misteriosa e. Dividir por e significaba que era diferente a cero, pero eliminarla significaba tratarla como si fuera igual a cero, lo cual era inamisible. Pero la misteriosa e después se convirtió en la diferencial de x (dx) o en las cantidades infinitamente pequeñas de Leibniz. De ahí que en libros de historia de las matemáticas se afirma que:

Aunque la lógica de la exposición de Fermat deja mucho que desear, se ve que su método es equivalente a establecer que:

$$m_{tan} = \lim_{e \to 0} \frac{f(x+e) - f(x)}{e}$$

Es decir que la pendiente de la tangente de $f(x)$ es igual al cálculo del límite cuando e tiende a cero. [8]

3.3.3. *Definición de la derivada como cociente incremental.*

Leibniz con sus trabajos por encontrar un método general para hallar la tangente a una curva dieron origen a la noción de derivada como el cociente incremental o el cociente de diferencias de una función $y = f(x)$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Reemplazando el símbolo de diferencia Δ por el “símbolo diferencial” d.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Leibniz afirmo " Δx no se aproxima a cero. En vez de eso, el ultimo valor de Δx no es cero sino una "cantidad infinitamente pequeña"[5] una "diferencial" llamada dx", y de manera similar Δy tiene un valor último infinitamente pequeño llamado dy . El cociente real de estas diferenciales infinitamente pequeñas es nuevamente un numero ordinario llamado derivada $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ " [8]

3.3.4. ***Definición de la derivada por el método de Fluxiones.***

Newton en libro "*Methodus Fluxiorum et Serierum Infinitorum*" que fue escrito en 1671 y publicado en 1736. Incluyó el método de fluxiones en la paginas 390–396 de su Algebra.

Newton concibe las cantidades matemáticas como el movimiento continuo de un punto que traza una curva. Cada una de estas cantidades variables que aparecen x, y,. . ., las llama "fluentes" y sus velocidades, designadas por $\dot{x}$, $\dot{y}\ldots$, las llama "fluxiones". La parte infinitesimal pequeña en la que un fluente se incrementa por unidad infinitesimal de tiempo o, es $\dot{x}o$, el momento del fluente.

El problema fundamental es, dada una relación entre fluentes hallar la relación entre sus fluxiones, y recíprocamente, dada una relación entre fluxiones hallar la correspondiente relación entre fluentes.

La relación entre fluxiones a partir de los fluentes se puede hallar si suponemos $y = f(x)$, es un pequeño intervalo o de tiempo x se incrementa a $x + \dot{x}o$, y se incrementa a

[5] *Leibniz consideraba los infinitesimales positivos como números que son mayores que cero, pero menores que todos los reales positivos. Para él los infinitesimales son incomparables, porque con respecto a las cantidades finitas son como "granos de arena con relación al mar".*

$y + \dot{y}o$, y al ser $y + \dot{y}o = f(x + \dot{x}o)$ será:

$$\dot{y} = \frac{f(x + \dot{x}o) - f(x)}{o}$$

Al ser o infinitamente pequeño se cancelan los términos que contienen o y aparece la relación entre fluxiones buscada.

Por ejemplo para $y = x^3$ se tiene:

$$\dot{y} = \frac{(x + \dot{x}o)^3 - x^3}{o}$$

$$\dot{y} = \frac{x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\, o^2\dot{x}^2 + o^3\dot{x}^3 - x^3}{o}$$

$$\dot{y} = \frac{3x^2\dot{x}o + 3x\, o^2\dot{x}^2 + o^3\dot{x}^3}{o}$$

$$\dot{y} = 3x^2\dot{x} + 3x\, o\dot{x}^2 + o^2\dot{x}^3$$

Luego se eliminan los términos que tienen o ya que se le supone infinitamente pequeño quedando: $\dot{y} = 3x^2\dot{x}$ y por lo tanto la relación entre fluxiones es:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3x^2$$

3.3.5. Definición de la derivada en física.

Stewart afirma “La derivada de la función posición de un móvil en el tiempo $t = a$ se interpreta como la velocidad instantánea del móvil en ese tiempo” [9]

$$v(a)_{instantanea} = f^{'}(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\, a+h) - \, f(a)}{h}$$

3.4. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA. [10]

Apóstol [10] en su libro afirma que este método para definir la derivada conduce a la idea geométrica de la tangente a una curva. En la figura 2 se observa una parte de la grafica de una función f. Las coordenadas de los puntos $P \, y \, Q$ son respectivamente $\big(x, f(x)\big) \, y \, (x+h, f(x+h))$.

En el triangulo rectangular que se forma cuya hipotenusa es el segmento $P\,Q$, la altura es $f(x+h) + \, f(x))$ y representa la diferencia de las ordenadas de los puntos $P \, y \, Q$ entonces el cociente de diferencias.

$$\frac{f(x+h) - \, f(x)}{h}$$

Representa la tangente trigonométrica del ángulo α que forma $P\,Q$ con la horizontal.

El número real tangente α se denomina pendiente de la curva entre P y Q y da un método para valorar la inclinación de esta línea.

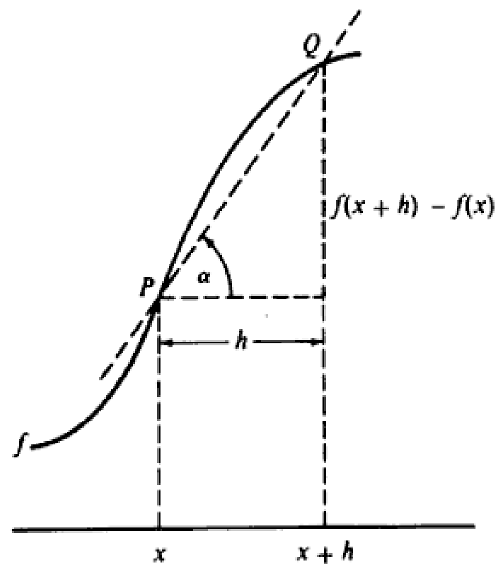


Figura 2. Interpretación geométrica del cociente de diferencias como tangente de un ángulo α "[8] pág. 207"

Sea f una función que tiene derivada en x, por lo que cociente de diferencias tiende a cierto límite $f'(x)$ cuando h tiende a cero. En la interpretación geométrica al ténder h a cero, el punto P permanece fijo pero Q se mueve hacia P a lo largo de la curva y la recta PQ se mueve cambiando su dirección de manera que la tangente del ángulo alfa tiende al límite$f'(x)$. Por esta razón parece natural tomar como pendiente de una curva en el punto P el número $f'(x)$.

3.5. TENDENCIAS SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA.

Tomando como referencia al Doctor Dolores [11] quien afirma que la orientación y enseñanza del concepto de la Derivada han sido marcados por dos tendencias. La primera donde se desarrolla el enfoque clásico formal bajo la estructura del análisis matemático para finalmente buscar sus aplicaciones. Y una segunda donde se busca el desarrollo del pensamiento matemático desde la resolución de problemas de modo que los conceptos básicos se forman a partir de la resolución de los mismos, como el problema de la tangente, razón de cambio y significados físicos.

Concluye Dolores señalando que ambas tendencias se manifiestan mediante enfoques que priorizan la estructura del contenido tales como: algebraico, numérico, formal, infinitesimal, aproximación afín local e innovadores tales como: geométrico, variacional y computacional.

3.5.1. Enfoque Algebraico.

Prioriza el trabajo con los algoritmos. Ejemplo limite del cociente incremental cuando Δx tiende a cero.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Las reglas generales de derivación.

1. Regla de las constantes: $\frac{d}{dx}[f(c)] = 0$
2. Regla de las potencias: $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$
3. Regla del múltiplo constante: $\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$

4. Reglas de la suma y la diferencia

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x) \quad \text{Regla de la suma.}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)-\ g(x)] = f'(x)-g'(x) \ \text{Regla de la diferencia.}$$

5. Regla del producto : $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$
6. Regla del cociente: $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \ \ g(x) \neq 0$

Estas utilizan formulas para obtener la derivada, las cuales carecen de un significado real.

3.5.2. ***Enfoque numérico***: se caracteriza por el uso de sucesiones numéricas, al usar el límite de funciones. Ejemplo:

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\ \Delta x)+\ g(x+\ \Delta x)]-\ [f(x)+g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\ \Delta x)+\ g(x+\ \Delta x)-\ f(x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\ \Delta x)-\ f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\ \Delta x)-\ g(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\ \Delta x)-\ f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\ \Delta x)-\ g(x)}{\Delta x}$$

3.5.3. ***Enfoque formal***: sigue la secuencia clásica de contenido. Iniciando con conjunto de los números Reales; concepto de función; definición de límite en términos de $\varepsilon \; y \; \delta$; definición rigurosa de continuidad por medio del límite; para al final plantear los teoremas y algoritmos necesarios para llegar a la derivada como consecuencia del límite; reglas de derivación y por último las aplicaciones.

3.5.4. ***Enfoque infinitesimal***: la estructura de los contenidos básicos del cálculo se organiza mediante una especie de isomorfismos respecto de los contenidos tradicionales. Primero se caracteriza el conjunto de los números Hiperreales $\mathfrak{R}^*$ y se definen como:

"*Un número* a $(a \in \mathfrak{R}^*)$ *es infinitésimo si* $|a| < r$ *para todo número real* r. *Y un infinitesimal grande (infinito) es aquel* $(b \in \mathfrak{R}^*)$ *tal que* $|a| > r$ *para todo número real* r.*"*

3.5.5. ***Enfoque aproximación afín local***. Para introducir el concepto de derivada se parte de la idea de coeficiente direccional (pendiente) de la recta para definir la pendiente de la secante. Para introducir la idea de tangente como el límite de una sucesión de secantes y con ello se establece la noción de aproximación afín.

Este enfoque considera que la tangente *g(x)* es la mejor aproximación lineal de la función *f* en la vecindad de *a*, de manera que *l*, la derivada, es el factor de proporcionalidad entre la diferencia *g(x) - g(a)* y *x - a*. La idea de la recta como mejor aproximación local de una curva es valiosa desde el punto de vista geométrico. Ver Figura 3

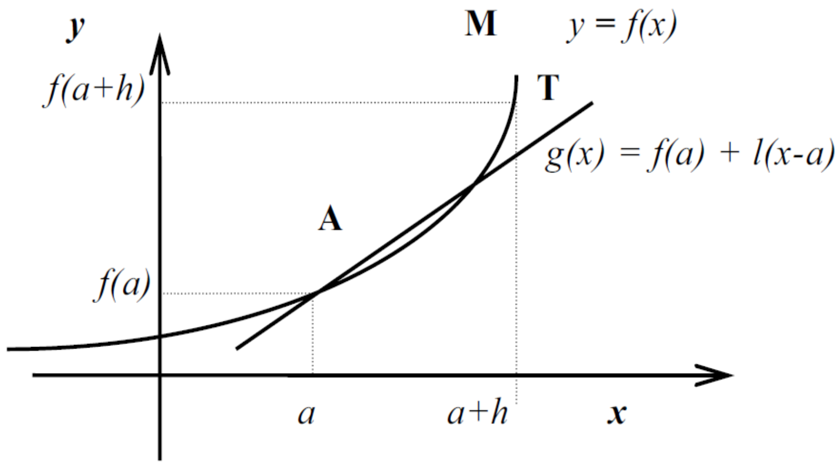


Figura 3. Mejor aproximación local de una curva [3] pág. 194.

La definición de derivada se presenta en los siguientes términos:

Sea f una función definida en el intervalo I y a $\in$ *I. Decir que el número real I es la derivada de* f *en* a *significa que la primera o la segunda de las condiciones siguientes se cumplen:*

1 La función $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *tiene por limite* l *si h tiende a cero (0).*

2.- Para todo número real h suficientemente próximo a 0, $f(a+h)=f(a)+\ lh+h\phi(h)$ *donde la función* ϕ *tiene por límite 0 cuando h tiende a 0.*

3.5.6. **E*nfoque geométrico*** desde este punto de vista la derivada es la tasa de cambio a la que está cambiando $f(x)$, comparada con respecto a x , es decir, es la pendiente de la tangente a la grafica de f ene l valor x. Puede aproximarse encontrando la pendiente de la secante. Ver grafica 4. La cual se puede calcular como:

$$m_{secante} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

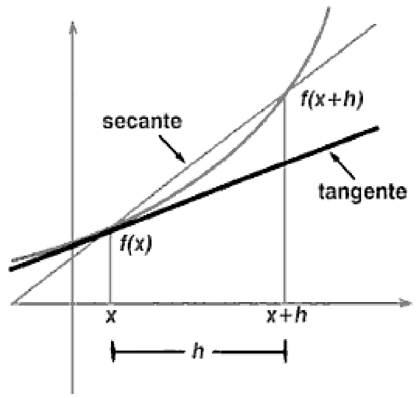


Figura 4. Aproximación geométrica de la derivada. [3]

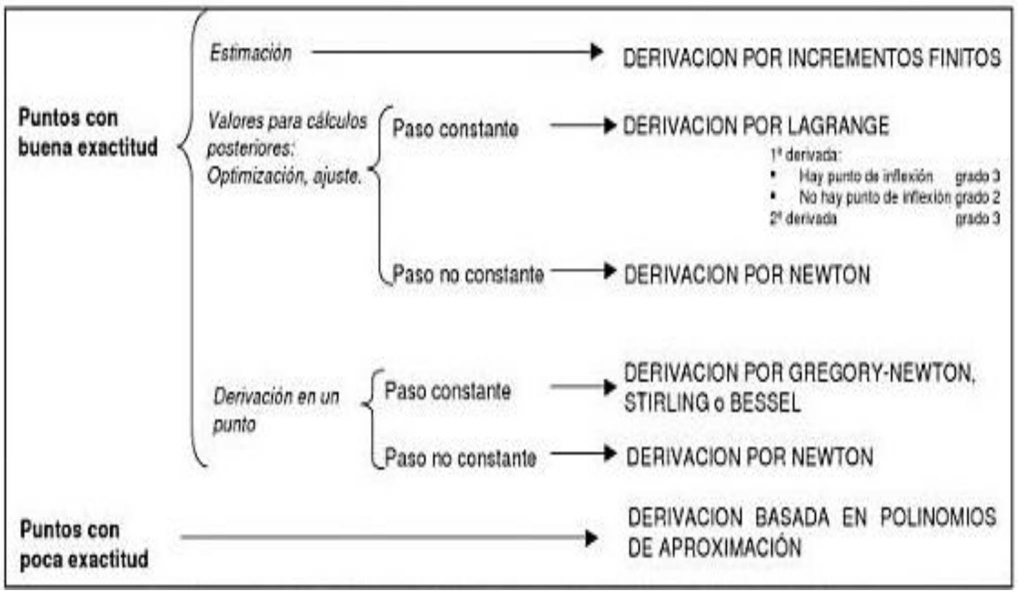
Supongamos ahora que h se hace muy pequeño. Entonces la secante se aproxima a la tangente a la grafica en x.

$$m_{tangente} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Una de las ventajas de este enfoque radica en que prioriza el significado y la utilidad práctica que la derivada tiene en la resolución de problemas.

3.5.7. ***Enfoque variacional*** En el primer caso se propone remover el discurso matemático escolar desde el fondo, cambiando el papel principal que los cursos de cálculo confieren al concepto de *límite* y poniendo en su lugar a la *variación física,* de tal manera que no se sugiere tratar tan exhaustivamente las funciones, sino más bien las cantidades y las magnitudes. Al concretar estas ideas, se parte de las razones de cambio promedio obtenidas del estudio de fenómenos de la vida diaria y se arriba a la derivada como razón de cambio instantánea por medio de un manejo intuitivo del límite

3.5.8. ***Enfoque computacional*** Los computadores han hecho realidad la posibilidad de la *visualización dinámica* del comportamiento gráfico de las funciones, de observar mediante simulaciones iterativas cómo la sucesión de secantes tiende a la tangente de racionalizar considerablemente el trabajo con los métodos numéricos



Figuran 5 Métodos numéricos de derivación. [12]

3.6. OBSTACULOS EPISTEMOLOGICOS EN LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA.

Los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico se pueden clasificar de acuerdo a su origen en obstáculos de origen ontogénico (son los que sobrevienen de las limitaciones del sujeto), obstáculos de origen didáctico (provocados por el sistema de enseñanza) y obstáculos de origen epistemológico (son aquellos derivados del rol constitutivo del saber mismo). Reconocer que los errores pueden deberse a causas epistemológicas y didácticas y no sólo de tipo cognitivo.

Bachelard [13] planteó la noción de obstáculo epistemológico para explicar la aparición de errores. Dicho concepto se refiere a las dificultades directamente vinculadas con las formas de considerar el conocimiento o con los conocimientos mismos. La noción de obstáculo epistemológico fue retomada por Brousseau para la didáctica de la matemática. Para él, el conocimiento se produce cuando se supera un obstáculo.

Orton (1980) en su investigación basada en una entrevista a 110 estudiantes de 16 a 22 años menciona una clasificación de los errores de los estudiantes al manipular la derivada clasificándolos en:

1. Errores estructurales. Se relacionan con los conceptos esenciales implicados.
2. Errores arbitrarios. No se tienen en cuenta los datos del problema para su solución.
3. Errores ejecutivos. Errores en la manipulación de los conceptos implicados.

Así mismo, los estudiantes manifiestan un buen nivel en la manipulación algebraica que aparece en los cálculos de funciones derivadas. Pero a su vez mostraron dificultad significativa en la conceptualización de los procesos de límite que sustentan el concepto de derivada, manifestando así los obstáculos cognitivos inherentes al concepto de límite.

Cornu (1983) identifica los siguientes obstáculos epistemológicos referentes al concepto de límite:

- Sentido común de la palabra límite, lo que induce a concepciones persistentes de límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso.
- Sobregeneralización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos.
- Aspecto metafísico de la noción, ligado con el infinito, ya que introduce una nueva forma de razonamiento.
- Los conceptos infinitamente grandes y cantidades infinitamente pequeñas.

Azcarate (1990), [14] demuestra las dificultades y los errores conceptuales y de técnicas de cálculo que aparecen cuando los estudiantes trabajan con los conceptos básicos que constituyen lo que podríamos denominar el pre cálculo:

a. Velocidad.
b. Pendiente de una recta.
c. Tasa de variación.

Así mismo Afirma *"¿Cómo se pretende definir la derivada como un límite de la función cociente incremental cuando los estudiantes no dominan estas ideas básicas?" "No tiene sentido avanzar en el concepto de derivada efectuando el paso al límite sin que se haya consolidado las ideas y habilidades del pre cálculo"* [14]

4. PROPUESTA DIDACTICA PARA ENSEÑAR EL CONCEPTO DE LA DERIVADA A PARTIR DEL COCIENTE DE INCREMENTOS.

"Se puede decir que el éxito en matemáticas
depende de la riqueza de las representaciones mentales de los conceptos matemáticos;
y una representación mental es rica si refleja muchos aspectos
relacionados con el concepto y si permite pasar de uno a otro con facilidad"
Carmen Azcárate

Tomando como referente a Newton y Leibniz con sus métodos para calcular la derivada y Carmen Azcarate y Dolores C se plantea la siguiente propuesta didáctica orientada a estudiantes de último año de secundaria y\o primeros semestres de universidad.

La propuesta didáctica se agrupa en cuatro secciones:

1. Conceptos previos como velocidad, pendiente y cociente incremental.
2. Definición de derivada.
3. Interpretación geométrica.
4. Reglas de derivación.
5. Problemas de Aplicación.

4.1. CONCEPTOS PREVIOS. VELOCIDAD, PENDIENTE Y COCIENTE INCREMENTAL.

4.1.1. ***Velocidad.*** Si se observa el velocímetro de un automóvil al viajar en el tráfico de la ciudad, se puede ver que la aguja no permanece inmóvil mucho tiempo, es decir la velocidad del auto no es constante. Al observar el velocímetro, suponemos que el vehículo tiene una velocidad definida en cada momento, ¿Pero cómo se define la velocidad?

Apóstol [10] define la velocidad media como el cociente entre la diferencia de distancia en el intervalo de tiempo y el intervalo de tiempo es decir:

$$velocidad_{media} = \frac{Diferencias\ de\ distancias\ en\ el\ intervalo\ de\ tiempo}{intervalo\ de\ tiempo}$$

Definiendo la distancia como $f(t)$ y un intervalo de tiempo como el instante t al instante $t + h$ se tiene:

$$velocidad_{media} = \frac{f(t+h) - f(t)}{(t+h) - t}$$

$$velocidad_{media} = \frac{f(t+h) - f(t)}{\mathrm{h}}$$

El número h puede ser positivo o negativo pero no cero. Con h como cantidad numérica infinitamente pequeña se define la velocidad instantánea para el instante t como:

$$velocidad_{instantanea} = lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

4.1.2. ***Pendiente.*** Larson [14] Define la recta tangente aun punto P en una circunferencia como “la recta perpendicular al radio que pasa por P figura 6”.

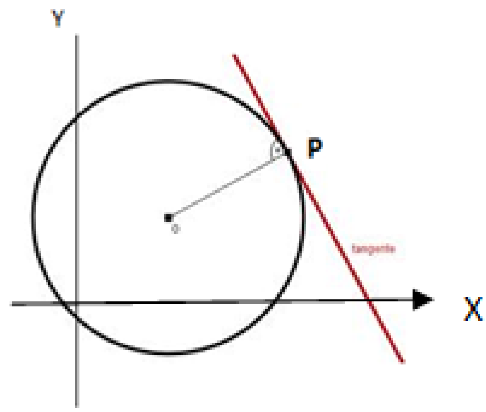


Figura 6. Recta tangente a una circunferencia.

El problema de encontrar la recta tangente en un punto P se reduce al calcular su pendiente en ese punto. Aproximar la pendiente de la recta tangente usando la recta secante (procede del latín secare que significa cortar) que pasa por el punto P y por otro punto cercano de la curva figura 7.

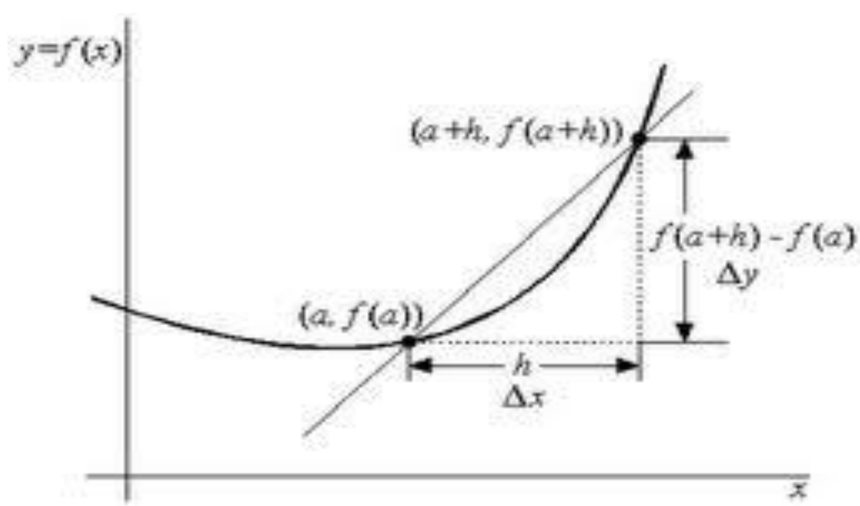


Figura 7. Recta secante que pasa por $(a, f(a);\ a+h, f(a+h))$

Las siguientes formulas se utilizan para el cálculo de la pendiente:

$$m = \frac{y_{2-}\ y_1}{x_{2-}\ x_1}\ (1)$$

Reemplazando los puntos en (1) :

$$m_{secante} = \frac{f(a+\Delta x)- f(a)}{(a+\Delta x)- a}\quad (2)$$

Luego la pendiente de la recta secante se define como:

$$m_{secante} = \frac{f(a+\ \Delta x)-\ f(a)}{\Delta x}$$

Y si existe un Δx infinitamente pequeño "que tiende a cero", entonces la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto de puede calcular como:

$$m_{tangente} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\ \Delta x)-\ f(a)}{(a+\ \Delta x)-\ a}$$

$$m_{tangente} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\ \Delta x)-\ f(a)}{\Delta x}$$

4.1.3. ***Cociente incremental.*** Los incrementos son variaciones en las variables. Los incrementos generalmente se indican con la letra Δ. Así Δx es la variación que se produce en la variable x, es decir:

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

Y Δy el incremento resultante entre la función y, es decir:

$$\Delta y = y_1 - y_0$$

Leibniz utiliza la siguiente notación para el cociente incremental.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

4.2. DEFINICIÓN DE LA DERIVADA A PARTIR DEL COCIENTE INCREMENTAL

Sea $y = f(x)$ una función continua. Si se hace variar x la y puede crecer con x o decrecer, o pasar de un estado decreciente a otro creciente o viceversa. Como ejemplo se supone la función $y = f(x)$ crezca con la x y sea su grafica la figura 8. Considerando un punto A de la curva con coordenadas (x, y)

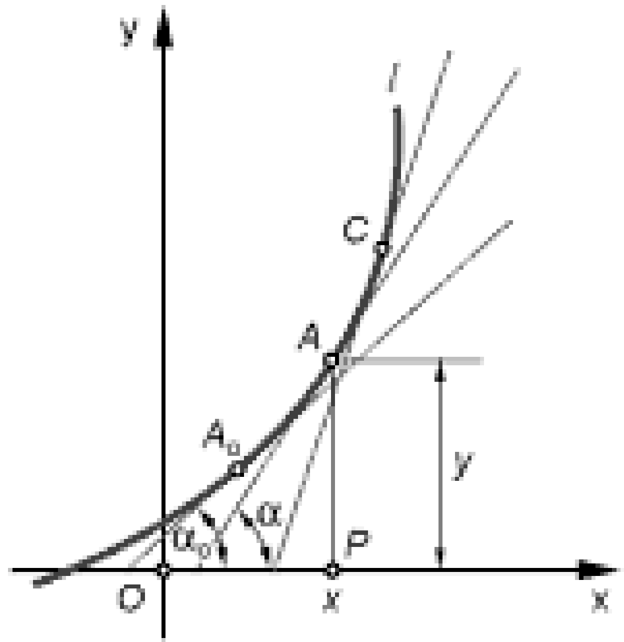


Figura 8. Grafica de la función $y = f(x)$.[16]

Se observa que para un determinado incremento de x , es mayor el incremento de y cuanto mayor es el ángulo α que la tangente en el punto A. Entonces el problema se reduce a buscar la tangente a la curva en un punto.

La variable x pasa de un valor x_0 a otro x_1, luego la función pasará de un valor y_0 a otro y_1.

El incremento $x_1 - x_0$ se indicara con el símbolo Δx luego:

$$x_1 = x_0 + \Delta x \; .$$

Y el incremento $y_1 - y_0$ se indicara con el símbolo Δy luego:

$$y_1 = y_0 + \Delta y$$

Como y_1 es el valor que toma la función para el valor x_1 se puede escribir:

$y_1 = f(x_1)$ y tambien $y_1 = f(x_0 + \Delta x)$.

El incremento $\Delta y = y_1 - y_0$, puede entonces expresarse como:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Dividiendo ambos miembros por Δx, se obtiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Expresión que recibe el nombre de cociente incremental de la función dada. Si Δx tiende a un número infinitesimal pequeño el cociente incremental recibe el nombre de derivada de la función dada. [6]

Ejemplo:

Sea $y = 2x^2 + 4x$. Hallar la derivada:

Utilizando el cociente incremental y $f(x) = 2x^2 + 4x$ se tiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2(x+\Delta x)^2 + 4(x+\Delta x) - (\ 2x^2 + \ 4x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x^2 + 4x\Delta x + \ 2\Delta x^2 + 4x + 4\Delta x - \ 2x^2 - \ 4x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4x\Delta x + \ 2\Delta x^2 + 4\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x \ + 4$$

Como $2\Delta x$ es una cantidad infinitamente pequeña entonces la derivada de la función $y = 2x^2 + \ 4x$ es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 4$$

4.3. INTERPRETACIÓN GEOMETRICA DEL COCIENTE INCREMENTAL.

Considerando la grafica 9 de la función $y = f(x)$. Las coordenadas del punto A son $(x\,, y)$ y del punto B son $(x_1\,, y_1)$. Si se tras ala secante BA se observa que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tagente } \beta$$

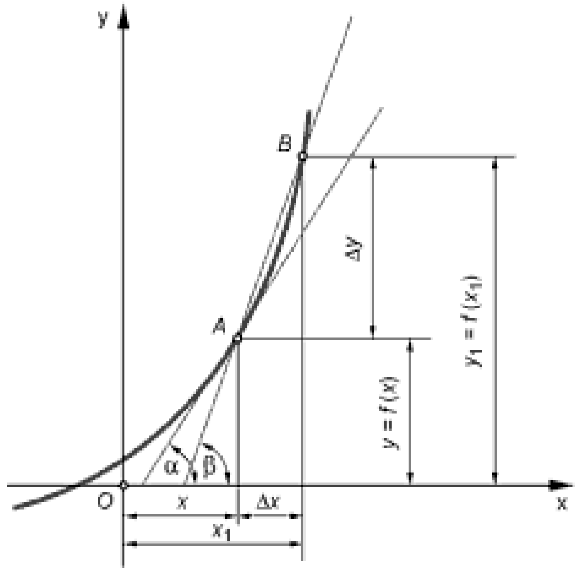


Figura 9. Grafica de la función $y = f(x)$ *[16].*

Por lo tanto, el cociente incremental de la función $y = f(x)$ es igual al coeficiente angular de la secante que pasa por por A y por B.

Si Δx es una cantidad infinitamente pequeña, el punto B se acerca indefinidamente al punto A luego la secante tiende a ser la Tangente en A . Luego:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tagente } \alpha = \text{ tagente } \beta$$

"La derivada de una función $y = f(x)$ *, en un punto A cualquiera, es la tangente trigonométrica del ángulo de la tangente que se forma en ese punto y con el eje* x" [16]

Es decir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tagente } \alpha$$

Ejemplo:

Sea la función: $y = \frac{x^2}{10}$ con Tabla 1. Valores y grafica:

Tabla 1. Valores de la función $y = \frac{x^2}{10}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0	0,1	0,4	0,9	1,6	2,5	3,6	4,9

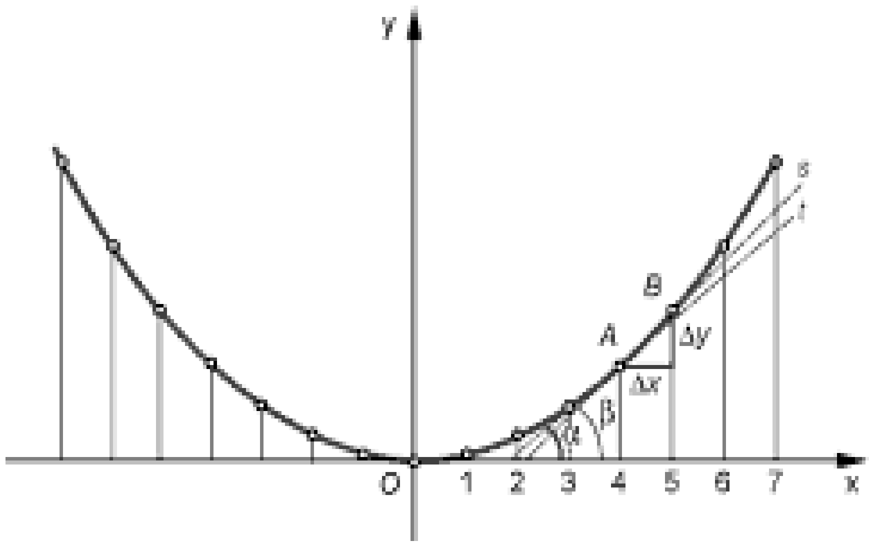


Figura 10. Grafica de la función $y = \frac{x^2}{10}$

La pendiente de la secante AB figura 10 es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{2{,}5 - 1{,}6}{5 - 4} = 0{,}9$$

El incremento de x del punto A al punto B es $\Delta x = 1$.

Si suponemos incrementos Δx de 0,1 ; 0,01 ; 0,001, 0,0001 se obtiene: (ver tabla 2)

TABLA 2. Pendiente de la secante para diferentes Δx

Δx	**Pendiente de la secante**
0,1	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1{,}681 - 1{,}6}{0{,}1} = 0{,}81$
0,01	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1{,}60801 - 1{,}6}{0{,}01} = 0{,}801$
0,001	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1{,}6008001 - 1{,}6}{0{,}001} = 0{,}8001$
0,0001	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1{,}600080001 - 1{,}6}{0{,}0001} = 0{,}80001$

Al observar el comportamiento de la pendiente de la secante cuando Δx es muy pequeño se ve que el valor se acerca a 0,8 que parece ser el valor de la pendiente de la tangente en el punto A.

Verificando analíticamente se tiene:

$$y = \frac{x^2}{10}$$

Reemplazando en:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{(x+\Delta x)^2}{10} - \frac{x^2}{10}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2}{10} - \frac{x^2}{10}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x + \Delta x}{10}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{5} + \frac{\Delta x}{10}$$

Con $x = 4$ $y\ \Delta x = 0{,}0001$ se tiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{5} + \frac{0{,}0001}{10}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0{,}8 + 0{,}00001$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0{,}80001$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \simeq 0{,}8$$

Resultado que hace ver como el incremento diferencial hacia el cual tiende los valores de la pendiente cuando la secante se acerca a la tangente en el punto A , no es sino la derivada de la función en el punto A con un Δx infinitamente pequeño.

4.4. REGLAS DE DERIVACIÓN.

4.4.1. ***Derivada de una constante***. Si una función es constate, es decir, siempre conserva el mismo valor de x, el incremento Δy es nulo para cualquier incremento Δx entonces:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Es decir; la derivada de una constante es cero.

Geometricamente se puede ver la regla ya que la grafica de una función constante $f\ (x) = C$;donde C es una constante. Es una recta paralela al eje x, figura 11.

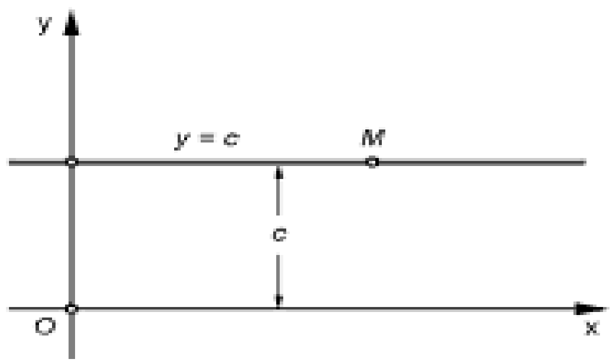


Figura 11. Grafica de la función $y = c$

La tangente trigonometrica del ángulo que se forma entre la recta $y = c$ y el eje x es cero.

4.4.2. ***Derivada de la variable independiente***. Si una función es constantemente igual a la variable independiente, su expresión es $y = x$

Para calcular la derivada se tiene:

$$y + \Delta y = x + \Delta x \quad [1]$$

Reemplazando en [1] $y = x$ se tiene

$$\Delta y = \Delta x \quad [2]$$

Dividiendo [2] entre Δx se obtiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

Luego, la derivada de la variable independiente x es 1.

Geométricamente se observa que la función $y = x$ corresponde a una recta que forma un ángulo de 45° con el eje x figura 12. Y la tangente trigonométrica del ángulo que se forma con el eje x, es decir, $tagente\ 45° = 1$.

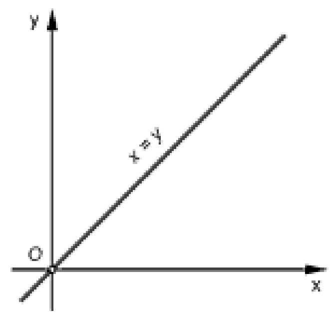


Figura 12. Grafica de la función $y = x$

4.4.3. ***Derivada de una función potencial***.

Si $y = x^n$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \text{ [1]}$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n \text{ [2]}$$

Desarrollando el binomio de Newton en [2] se obtiene:

$$\Delta y = x^n + n\, x^{n-1}\Delta x + \left(\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \Delta x^k\right) - x^n \text{ [3]}$$

Luego dividiendo [3] entre Δx se obtiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = n\, x^{n-1}$$

4.4.4. ***Derivada de la suma algebraica de varias funciones***:

Sea la función: $y = y_1 + y_2$ dado un incremento Δy se tiene:

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 \quad [1]$$

Dividiendo por Δx [1]

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x}$$

Del resultado anterior se puede concluir que la derivada de la suma algebraica de varias funciones es igual a la suma de las derivadas de cada una de las funciones.

4.4.5. ***Derivada del producto de dos funciones.***

Sea $y(x) = f(x)g(x)$

Dado un incremento Δx se tiene:

$$y(x + \Delta x) = f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) \ [1]$$

Restando $y(x)$ en [1] se obtiene:

$$y(x + \Delta x) - y(x) = f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \ [2]$$

Restando y sumando $f(x + \Delta x)g(x)$ en [2] se tiene:

$$= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - \boldsymbol{f(x + \Delta x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x)} - f(x)g(x) \ [3]$$

$$= f(x + \Delta x)[g(x + \Delta x) - g(x)] + g(x)\big[f(x + \Delta x) - f(x)\big] \ [4]$$

Dividiendo [4] en Δx:

$$\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)[g(x+\Delta x)-g(x)]+g(x)[f(x+\Delta x)—f(x)]}{\Delta x}$$

$$\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}+\frac{g(x)[f(x+\Delta x)—f(x)]}{\Delta x} \quad [5]$$

$$\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=f(x+\Delta x)\frac{[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}+g(x)\frac{[f(x+\Delta x)—f(x)]}{\Delta x}$$

Luego:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x}+g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Entonces; la derivada de un producto de dos funciones es igual al producto de la segunda por la derivada de la primera, más el producto de la primera por la derivada de la segunda.

4.4.6. ***Derivada del cociente de dos funciones***.

Sea $y(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

Dado un incremento Δx se tiene:

$$y(x+\Delta x)=\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} \quad [1]$$

Restando $y(x)$ en [1] se obtiene:

$$y(x+\ \Delta x)-\ y(x)=\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x\ )}-\frac{f(x)}{g(x)}\ [2]$$

$$y(x+\ \Delta x)-\ y(x)=\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x\ )}{g(x+\Delta x\ )g(x)}\ [3]$$

Dividiendo [3] entre Δx se tiene:

$$\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{f(x+\Delta x)g(x)}{\Delta x}-\frac{f(x)g(x+\Delta x\ )}{\Delta x}}{g(x+\Delta x\ )g(x)}\ [4]$$

Organizando [4] y con Δx como una cantidad infinitamente pequeña se tiene:

$$\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\frac{g(x)\frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x}-f(x)\frac{g(x+\Delta x\ )}{\Delta x}}{g(x)^2}\ [5]$$

Es decir;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x}-f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x)^2}$$

La derivada de un cociente es igual a una fracción que tiene como denominador el cuadrado del denominador y como numerador la diferencia entre el producto del denominador por la derivada del numerador y el producto del numerador por la derivada del denominador.

4.4.7. ***Derivada de la función Seno***.

Sea la función $y = senx$ con un incremento Δx a la variable x, resulta

$$y + \Delta y = sen(x + \Delta x) \; [1]$$

Restando $y = senx$ y dividiendo por Δx se tiene;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{sen(x+\Delta x) - senx}{\Delta x} \; [2]$$

Por identidad trigonométrica $sen(\alpha + \beta) = sen\alpha \, cos\beta + cos\alpha \, sen\beta$

Reemplazando α por x y β por Δx en [2] se obtiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{senx \, cos\Delta x + cosx \, sen\Delta x - senx}{\Delta x} \; [3]$$

Cuando el ángulo es muy pequeño es decir Δx es una cantidad infinitamente pequeña se tiene:

$$sen \, \Delta x = \Delta x$$

Como se observa en la figura 13 grafica de la función seno para cantidades infinitamente pequeñas.

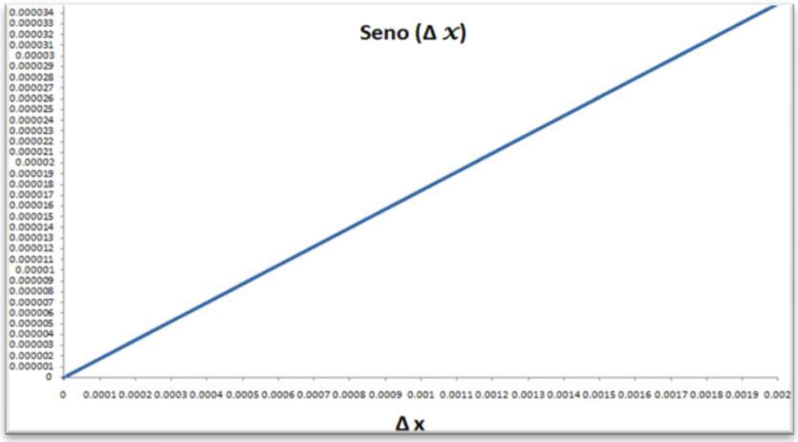


Figura 13. Grafica de la función $seno\ (\Delta x)$ *donde* Δx *es una cantidad infinitamente pequeña.*

Y

$$cos\ \Delta x = 1$$

Como se observa en la figura 14 grafica de la función coseno para cantidades infinitamente pequeñas.

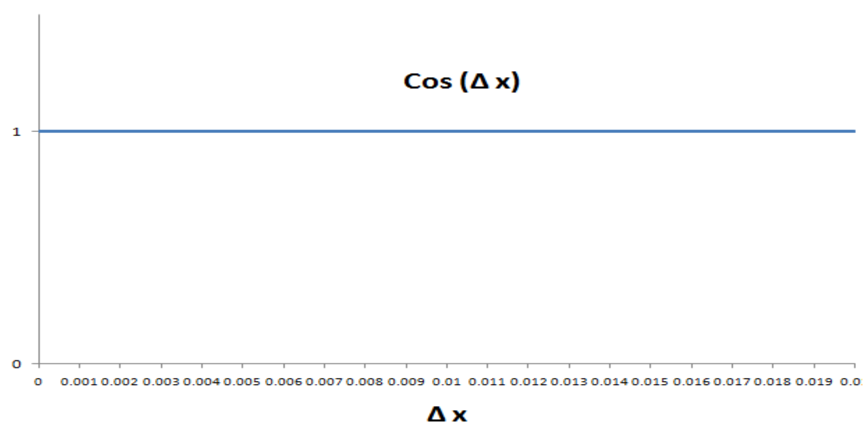


Figura 14. Grafica de la función $Coseno\ (\Delta x)$ *donde* Δx *es una cantidad infinitamente pequeña.*

Luego:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{senx \cdot 1 + cosx \cdot \Delta x - senx}{\Delta x} \quad [4]$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{cosx \cdot \Delta x}{\Delta x} \quad [5]$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = cosx$$

La derivada de $senx$ es $cosx$

4.4.8. ***Derivada de la función coseno***.

Sea la función $y = cosx$ con un incremento Δx a la variable x, resulta

$$y + \Delta y = cos(x + \Delta x) \ [1]$$

Restando $y = senx$ y dividiendo por Δx se tiene;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{cos(x+\Delta x) - cosx}{\Delta x} \ [2]$$

Por identidad trigonométrica $cos(\alpha + \beta) = cos\alpha\ cos\beta - se\alpha\ sen\beta$

Reemplazando α por x y β por Δx en [2] se obtiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{cosx\ cos\Delta x - senx\ sen\Delta x - cosx}{\Delta x} \quad [3]$$

Cuando el ángulo es muy pequeño es decir Δx es una cantidad infinitamente pequeña entonces:

$$sen\,\Delta x = \Delta x$$

$$cos\,\Delta x = 1$$

Luego:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{cosx \cdot 1 - senx \cdot \Delta x - cosx}{\Delta x} \quad [4]$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-senx \cdot \Delta x}{\Delta x} \quad [5]$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -senx$$

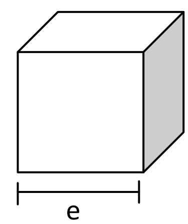
La derivada de $cos\,x$ es $-sen\,x$

4.5. PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

4.5.1. Problema 1.

Sea V el volumen de un cubo en pulgadas cubicas de e pulgadas de arista. Encontrar el promedio del cociente incremental por cambio de pulgada, en la longitud de la arista cuando e cambia de:

a. 3 a 3,1.
b. 3 a 3,01.
c. 3 a 3,001
d. Cuál es la razón de cambio instantánea?



<u>SOLUCIÓN:</u>

Como la fórmula para calcular el volumen de un cubo es $V = e^3$ entonces el promedio del cociente incremental de V por unidad de cambio e es:

$$\frac{\Delta V}{\Delta e} = \frac{(e+\Delta e)^3 - e^3}{\Delta e} \quad (1)$$

Resolviendo el binomio cubico de (1) se obtiene:

$$\frac{\Delta V}{\Delta e} = \frac{3e^2\,\Delta e + 3\,e\,\Delta e^2 + \Delta e^3}{\Delta e} \quad (2)$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta e} = 3e^2 + 3\,e\,\Delta e + \Delta e^2 \quad (3)$$

Reemplazando los valores en la expresión (3) se tiene:

a. De 3 a 3.1 entonces $e = 3$ y $\Delta e = 0{,}1$

$$\frac{\Delta V}{\Delta e} = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 \cdot 0{,}1 + 0{,}1^2$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta e} = 27{,}91.$$

b. De 3 a 3.1 entonces $e = 3$ y $\Delta e = 0{,}01$

$$\frac{\Delta V}{\Delta e} = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 \cdot 0{,}01 + 0{,}01^2$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta e} = 27{,}01.$$

c. 3 a 3,001 1 entonces $e = 3$ y $\Delta e = 0{,}001$

$$\frac{\Delta V}{\Delta e} = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 \cdot 0{,}001 + 0{,}001^2$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta e} = 27{,}009$$

d. Para calcular la razón de cambio instantáneo se puede tomar Δe como una cantidad infinitamente pequeña que tiende a cero, luego con $e = 3$ y Δe infinitamente pequeño se tiene:

$$\frac{\Delta V}{\Delta e} = 3e^2 = 3 \cdot 3^2 = 27$$

4.5.2. Problema 2.

Calcular la pendiente de la tangente y la ecuación de la línea tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto $(4, 2)$.

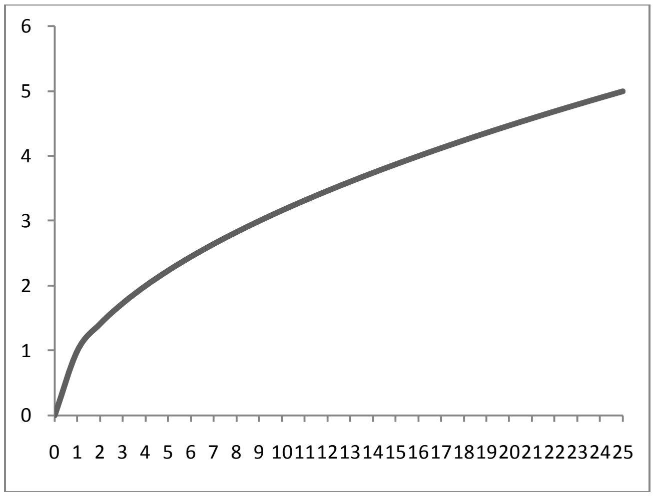


Figura 15. Grafica de la función $y = \sqrt{x}$

SOLUCIÓN:

Sea: $y = \sqrt{x}$ entonces,

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x} \quad (2)$$

Restando $y = \sqrt{x}$ en (2) y dividiendo por Δx :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \quad (3)$$

Multiplicando tanto el numerador como el denominador por $\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}$ de (3), se tiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x+\Delta x}\,)^2 - (\sqrt{x})^2}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

Con Δx infinitamente pequeño $\Delta x \to 0$ se tiene:

Pendiente de la tangente:

$$m_{tangente} = \frac{1}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \blacksquare$$

Cuando $x = 4$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, la pendiente de la tangente a $y = \sqrt{x}$ cuando $x = 4$ es $\frac{1}{4}$

Por otro lado, la ecuación de la línea tangente, usamos la formula punto pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$ Con pendiente $m = \frac{1}{4}$ y $(x_1, y_1) = (4,2)$se tiene:

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$$

Luego

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$

4.5.3. Problema 3.

Calcular la pendiente de la función: $f(x) = \frac{1}{x}$ para el punto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ y $\Delta x = 0{,}01$; $\Delta x = 0{,}001$; $\Delta x = 0{,}0001$ y $\Delta x = 0{,}00001$

SOLUCIÓN:

Sea $y = f(x) = \frac{1}{x}$ con grafica figura 16

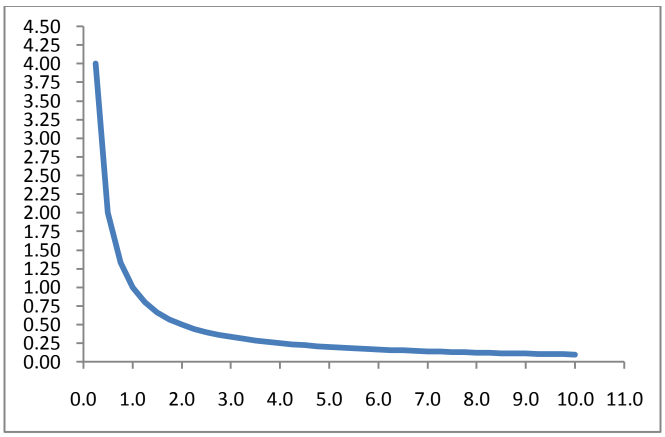


Figura 16. Grafica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$

Entonces:

$$\Delta y + y = \frac{1}{x + \Delta x} \quad (1)$$

Restando $y = \frac{1}{x}$ y dividiendo por Δx en (1) se tiene:

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$m = \frac{1}{x(x+\Delta x)} \quad (2)$$

Luego la expresión para calcular la pendiente de la recta tangente es $m = \frac{1}{x^2}$ con Δx infinitamente pequeño.

Reemplazando en (2) los valores $x = 2$; $\Delta x = 0{,}01$; $\Delta x = 0{,}001$; $\Delta x = 0{,}0001$ y $\Delta x = 0{,}00001$

Se obtiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2(2 + 0{,}01)} = 0{,}2487$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2(2 + 0{,}001)} = 0{,}2498$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2(2 + 0{,}0001)} = 0{,}24998$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2(2 + 0{,}00001)} = 0{,}24999$$

De los anteriores resultados se puede concluir que entre más pequeño sea Δx la pendiente en el punto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ se va aproximando al valor numérico de 0,25.

4.5.4. Problema 4.

Se supone que la altura $f(t)$ de un proyectil, t segundos después de haber sido lanzado hacia arriba a partir del suelo con una velocidad inicial v_0 metros por segundo, está dada por la formula:

$$f(t) = v_0 t - 5t^2$$

a. Probar que la velocidad media del proyectil durante el intervalo de tiempo de t a $t + h$ es $v_0 - 10t - 5h$ metros por segundo.

SOLUCIÓN:

Sea:

$$f(t) = v_0 t - 5t^2$$
$$f(t+h) = v_0(t+h) - 5(t+h)^2$$

Reemplazando en

$$velocidad_{media} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Se obtiene:

$$velocidad_{media} = \frac{(v_0(t+h) - 5(t+h)^2) - (v_0 t - 5t^2)}{h}$$

$$velocidad_{media} = \frac{v_0 t + v_0\, h - 5\, t^2 - 10t\, h - 5\, h^2 - v_0 t + 5t^2}{h}$$

$$velocidad_{media} = \frac{v_0\, h - 10t\, h - 5\, h^2}{h}$$

$$velocidad_{media} = v_0 - 10t - 5\, h \quad \blacksquare$$

b. Probar que la velocidad instantánea del proyectil en el instante t es $v_0 - 10t$ metros por segundo.

Tomando valores de h cada vez más pequeños "cantidades infinitamente pequeñas" en

$$velocidad_{media} = v_0 - 10t - 5\, h$$

Se obtiene:

$$velocidad_{instantanea} = v_0 - 10t \quad \blacksquare$$

4.5.5. Problema 5.

A partir de la definición de derivada y utilizando las reglas de derivación Probar que la derivada de $tanx$ es sec^2x.

SOLUCIÓN:

Sea:

$y = \tan x$

Por identidad trigonométrica $\tan x = \frac{senx}{cosx}$ entonces $y = \frac{senx}{cosx}$

Luego utilizando la regla de derivación para cociente se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cosx(senx)' - senx\,(cosx)'}{(cosx)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cosxcosx + senx\,senx}{(cosx)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cosx^2 + senx^2}{(cosx)^2}$$

Utilizando la identidad trigonometría $cosx^2 + senx^2 = 1$ se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos^2x} = sec^2x$$

Es decir, $\frac{d}{dx}tanx = sec^2x$ ■

5. CONCLUSIONES

El concepto de la derivada, como un cociente incremental infinitesimal, fue de gran ayuda en la resolución de muchos problemas tanto matemáticos como físicos a través de la historia, es así como Cornu 1983 afirma "La derivada no es una aplicación del concepto de límite sino todo lo contrario, el cálculo de derivadas es el que ha conducido hacia este concepto".

El término infinitesimal se puede asociar a un incremento siguiendo a Newton quien la definió como "*el incremento de una variable en un intervalo de tiempo infinitamente corto*". A si mismo Leibniz consideraba los infinitesimales positivos como números que son mayores que cero, pero menores de todos los reales positivos. Y L' Hospital definió el incremento o decremento de una variable Las "diferencias" como partes infinitamente pequeñas que aumenta o disminuye dependiendo un contexto.

En la enseñanza de las matemáticas se hace necesario trabajar haciendo uso de modelos sencillos y prácticos, es por eso que esta propuesta para el desarrollo del concepto de la derivada se inicia a través del cociente incremental, que conlleven al estudiante a conceptualizar el límite de una forma natural. Por consiguiente se recomienda incluir esta propuesta al currículo y al plan de estudio de la básica secundaria específicamente en el grado once.

REFERENCIAS

[1] Ramírez R. *Historia y epistemología de la función derivada* Publicada en Tecné, Episteme y Didaxis: TED No. Extraordinario, 2009. En línea: http://www.pedagogica.edu.co/revistas/ojs/index.php/TED/article/viewDownloadInterstitial/261/252

[2] Salazar Claudia *Descripción de niveles de comprensión del concepto derivada* Publicado en la revista TEA numero 26 segundo semestre 2009. En línea: http://www.pedagogica.edu.co/revistas/ojs/index.php/TED/article/viewArticle/421

[3] Dolores C.. *El futuro del cálculo infinitesimal.* Capítulo V: ICME-8 Sevilla, España. Cantoral R. Grupo Editorial Iberoamérica. México D. F, 2000

[4] Savador Llinares *La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática,* publicado en la revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa Mayo 2008. En línea: http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33511205&iCveNum=9507

[5] Ángel Ruiz. *Historia y filosofía de las matemáticas*. Editorial EUNED, Madrid 2002.

[6] Chadid I., *Un paseo finito por lo infinito El infinito en las matemáticas*. Editorial Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, 2007

[7] Apostol T.M. *Análisis matemático de Apóstol* Editorial Reverte Madrid 1976. Pagina 125.

[8] Courant R., *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*. Fondo de cultura económica, Edición segunda. México, 2002.

[9] Stewart Ian. *Historia de la matemáticas*, Editorial Crítica Barcelona 2008

[10] Apostol T. M. Calculus volumen 1. Editorial Reverte, Madrid 1985.

[11] Dolores C., *Matemática educativa, algunos aspectos de la sociepistemologia y la visualización en el aula. Ediciones Díaz de Santos, México 2007.* En línea http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/documentos/pdf/fundamentos-de-calculo.pdf

http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/AsiLoHicieron/Cauchy/InprimaketaCauchy.asp

[12] Tomas Xavier. *Cálculo numérico*. Editorial instic quim the saria departamente de estadística. Barcelona España 2006

[13] Artigue Michale. *Una introducción a la didáctica de la matemática", en Enseñanza de la Matemática*, Selección bibliográfica, 1994.

[14] Azcarate Carmen, *Calculo diferencial e integral* Editorial Síntesis, Madrid 1996.

[15] Larson Hostetler, *Calculo*, octava edición , Mac Graw Hill Mexico 2006.

[16] Di Pietro Donato *Cálculo Infinitesimal*. Buenos Aires, 2010 en línea: http://books.google.com/books?id=dzBPY7JtA0C&printsec=frontcover&dq=calculo+infinitesimal+donato&hl=es&ei=xCvoTcGlAdCXtwe00vijAQ&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=1&ved=0CCkQ6AEwAA#